

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MATERIAIS  
CURSO DE ENGENHARIA DE MATERIAIS

HUGO LEONARDO FARIA NASCIMENTO

LAMINAÇÃO: UM ESTUDO DE MODELOS DE CÁLCULO DA CARGA DE  
LAMINAÇÃO A FRIO

BELO HORIZONTE

2015

HUGO LEONARDO FARIA NASCIMENTO

LAMINAÇÃO: UM ESTUDO DE MODELOS DE CÁLCULO DA CARGA DE  
LAMINAÇÃO A FRIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Graduação em Engenharia de Materiais do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia de Materiais.

Orientador: Prof. Dr. Yukio Shigaki

BELO HORIZONTE

2015

HUGO LEONARDO FARIA NASCIMENTO

**LAMINAÇÃO: UM ESTUDO DE MODELOS DE CÁLCULO DA CARGA DE  
LAMINAÇÃO A FRIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Graduação em Engenharia de Materiais do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia de Materiais.

Aprovado em: 10 / 12 /2015

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Yukio Shigaki – Orientador

---

Prof. Wellington Lopes

---

Prof. Sandro Cardoso Santos

*Dedico este trabalho aos meus pais Hermano e Lucieni,  
à minha irmã Clara,  
e a todos os amigos e familiares.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus acima de tudo, obrigado pela eterna vigília de proteção, por me manter no caminho certo e com o coração sereno. Obrigado meu Senhor.

Agradeço aos meus pais Lucieni e Hermano pelo apoio e amor incondicional ao longo de toda a minha caminhada para a graduação. Obrigado Mãe, obrigado Pai.

Agradeço à minha irmã Clara por todos os momentos de reflexão e diversão juntos. Obrigado linda.

Agradeço aos meus familiares e amigos que ainda de longe contribuíram para a minha formação, sempre me incentivando e motivando para que eu doasse o meu melhor. Obrigado avôs, avós, tios, tias, primos, primas e amigos.

Agradeço ao meu orientador Dr. Yukio Shigaki por toda a ajuda e elucidação necessária para que eu pudesse desenvolver um trabalho coerente e concreto. Obrigado por todas as horas e mais horas de orientação.

Agradeço aos mestres e doutores do CEFET-MG que, sem pedir nada em troca, dedicaram-se a cuidar do meu amadurecimento acadêmico e pessoal. Obrigado professores.

Agradeço ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais por ter sido minha fonte inesgotável de conhecimento desde meu ensino técnico em 2006 até a presente data. Obrigado CEFET-MG.

## RESUMO

A laminação é um processo de conformação mecânica onde busca-se reduzir a espessura de blocos, tiras e chapas por meio da passagem do material por rolos de compressão. Para que este processo se mantenha livre de defeitos se faz necessário o cálculo e constante avaliação da carga de laminação. Foram estudados alguns modelos de cálculo de carga para a laminação a frio e implementou-se em um software de cálculos numéricos o modelo de Bland e Ford (1948) e o modelo de Alexander (1971). Executou-se dois casos de laminação e variou-se o coeficiente de atrito, o raio do cilindro de trabalho, a espessura inicial, a tensão a ré e a tensão a frente, verificando-se a influência desses parâmetros no valor calculado de carga/largura de laminação, no comprimento do arco de contato e na distribuição de pressões sobre o arco de contato. Comparou-se a velocidade de execução de ambos os modelos. Comparou-se também os resultados encontrados com um modelo de cálculo NONCIRC de arco não-circular de Abdelkhalek e Montmitonnet (2011). Foi verificado que ambos os modelos apresentam resultados consistentes com aqueles encontrados em situações industriais reais, sendo o modelo de Alexander mais completo e realístico que o de Bland e Ford por se valer de menos aproximações para os cálculos.

Palavras-chave: carga de laminação, laminação a frio, arco de contato, colina de atrito.

## ***ABSTRACT***

Rolling is a process of metal forming which seeks to reduce the thickness of plates, strips and sheets by passing the material through compression rolls. In order to maintain the process free of defects the calculation and constant assessment of the rolling load is required. Rolling load calculation models for cold rolling were studied and the Bland and Ford's (1948) model and Alexander's (1971) model were implemented in a numerical calculation software. Two cold rolling cases were considered and the friction coefficient, the working roll radius, the initial thickness, the back and front tension stress were varied in order to evaluate the influence of these parameters on the calculated rolling load/width, the contact arc length and pressure distribution over the contact arc. The execution time between the two models was compared. The results were also compared with a non-circular arc model NONCIRC from Abdelkhalek e Montmitonnet (2011). It was found that both models present consistent results with those found in industrial data, the most complete and realistic model was chosen to be Alexander's model, because it does not rely on approximations to solve the rolling problem like Bland and Ford's model does.

**Keywords:** rolling load, cold rolling, contact arc, friction hill.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Laminador duo. ....	19
Figura 2 - A) Laminador quádruo. B) Laminador <i>Six-High</i> . C) Laminador Sendzimir. ....	20
Figura 3 – Relações geométricas na laminação de planos. ....	21
Figura 4 – A) Compressão não-homogênea. B) Compressão homogênea. ....	23
Figura 5 - Distribuição das tensões de atrito na interface cilindro-metal durante a laminação. ....	24
Figura 6 - Raio do cilindro $R$ e raio deformado do cilindro $R'$ para uma dada redução $\Delta h$ . ....	25
Figura 7 - Esquema mostrando a existência de uma zona de compressão elástica e uma zona de retorno elástico. ....	26
Figura 8 - Blocos para análise de tensões e as tensões agindo nos blocos (a) e (b). ....	28
Figura 9 - Seção transversal circular na zona plástica de deformação que toca a superfície do cilindro perpendicularmente em qualquer posição. ....	31
Figura 10 - Geometria detalhada e variáveis de laminação utilizadas na dedução de Alexander (1971). ....	38
Figura 11 - Curva tensão X deformação verdadeira do material para os casos 1 e 2. ....	43
Figura 12 - Efeito da variação do coeficiente de atrito na carga de laminação (Caso 1). ....	54
Figura 13 - Efeito da variação do coeficiente de atrito no comprimento do arco de contato (Caso 1). ....	54
Figura 14 - Efeito da variação do atrito na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford. ....	55
Figura 15 - Efeito da variação do atrito na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander. ....	55
Figura 16 - Efeito da variação do coeficiente de atrito na carga de laminação (Caso 2). ....	56
Figura 17 - Efeito da variação do coeficiente de atrito no comprimento do arco de contato (Caso 2). ....	57
Figura 18 - Efeito da variação do atrito na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford. ....	57
Figura 19 - Efeito da variação do atrito na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander. ....	58
Figura 20 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na carga de laminação (Caso 1). ....	59

<b>Figura 21 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho no comprimento do arco de contato (Caso 1). .....</b>	<b>60</b>
<b>Figura 22 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford.....</b>	<b>60</b>
<b>Figura 23 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander. ....</b>	<b>61</b>
<b>Figura 24 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na carga de laminação (Caso 2).....</b>	<b>62</b>
<b>Figura 25 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho no comprimento do arco de contato (Caso 2). ....</b>	<b>62</b>
<b>Figura 26 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford.....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 27 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander. ....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 28 - Efeito da variação da espessura inicial na carga de laminação (Caso 1).....</b>	<b>64</b>
<b>Figura 29 - Efeito da variação da espessura inicial no comprimento do arco de contato (Caso 1).....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 30 - Efeito da variação da espessura inicial na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford. ....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 31 - Efeito da variação da espessura inicial na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander.....</b>	<b>66</b>
<b>Figura 32 - Efeito da variação da espessura inicial na carga de laminação (Caso 2).....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 33 - Efeito da variação da espessura inicial no comprimento do arco de contato (Caso 2).....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 34 - Efeito da variação da espessura inicial na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford. ....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 35 - Efeito da variação da espessura inicial na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander.....</b>	<b>68</b>
<b>Figura 36 - Efeito da variação da tensão a ré na carga de laminação (Caso 1). ....</b>	<b>69</b>

Figura 37 - Efeito da variação da tensão a ré no comprimento do arco de contato (Caso 1).....	70
Figura 38 - Efeito da variação da tensão a ré na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford. ....	70
Figura 39 - Efeito da variação da tensão a ré na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander. ....	71
Figura 40 - Efeito da variação da tensão a ré na carga de laminação (Caso 2). ....	72
Figura 41 - Efeito da variação da tensão a ré no comprimento do arco de contato (Caso 2).....	72
Figura 42 - Efeito da variação da tensão a ré na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford. ....	73
Figura 43 - Efeito da variação da tensão a ré na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander. ....	73
Figura 44 - Efeito da variação da tensão a frente na carga de laminação (Caso 1). ....	74
Figura 45 - Efeito da variação da tensão a frente no comprimento do arco de contato (Caso 1).....	75
Figura 46 - Efeito da variação da tensão a frente na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford. ....	75
Figura 47 - Efeito da variação da tensão a frente na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander. ....	76
Figura 48 - Efeito da variação da tensão a frente na carga de laminação (Caso 2). ....	77
Figura 49 - Efeito da variação da tensão a frente no comprimento do arco de contato (Caso 2).....	77
Figura 50 - Efeito da variação da tensão a frente na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford. ....	78
Figura 51 - Efeito da variação da tensão a frente na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander. ....	78
Figura 52 - Distribuição de pressões ao longo da distância x para o Caso 1 segundo o modelo NONCIRC. ....	80
Figura 53 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 1 segundo o modelo NONCIRC. ....	80
Figura 54 - Distribuição de pressões ao longo da distância horizontal do centro do cilindro para o Caso 1 segundo os modelos de Bland e Ford e Alexander.....	81

<b>Figura 55 - Distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo NONCIRC. ....</b>	<b>82</b>
<b>Figura 56 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 2 segundo o modelo NONCIRC. ....</b>	<b>82</b>
<b>Figura 57 - Distribuição de pressões ao longo da distância horizontal do centro do cilindro para o Caso 2 segundo os modelos de Bland e Ford e Alexander. ....</b>	<b>83</b>
<b>Figura 58 - Distribuição de pressões ao longo da distância x para o Caso 3 segundo o modelo NONCIRC. ....</b>	<b>85</b>
<b>Figura 59 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 3 segundo o modelo NONCIRC. ....</b>	<b>85</b>
<b>Figura 60 - Distribuição de pressões ao longo da distância x para o Caso 4 segundo o modelo NONCIRC. ....</b>	<b>86</b>
<b>Figura 61 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 4 segundo o modelo NONCIRC. ....</b>	<b>86</b>
<b>Figura 62 - Distribuição de pressões ao longo da distância x para o Caso 5 segundo o modelo NONCIRC. ....</b>	<b>87</b>
<b>Figura 63 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 5 segundo o modelo NONCIRC. ....</b>	<b>87</b>

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1 - Tempo típico de execução dos programas de cálculo de carga para os Casos 1 e 2. ....</b>	<b>53</b>
<b>Tabela 2 - Comparativo para o Caso 1. ....</b>	<b>83</b>
<b>Tabela 3 - Comparativo para o Caso 2. ....</b>	<b>84</b>
<b>Tabela 4 – Valores de carga e comprimento do arco de contato segundo o modelo NONCIRC. ....</b>	<b>88</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$R$	.....	Raio do cilindro de trabalho
$D$	.....	Diâmetro do cilindro de trabalho
$R'$	.....	Raio deformado do cilindro de trabalho
$\alpha$	.....	Ângulo de contato
$\alpha_N$	.....	Ângulo neutro
$\emptyset$	.....	Coordenada angular entre $0 < \emptyset < \alpha$
$L$	.....	Comprimento do arco de contato
$h_i$	.....	Espessura de entrada
$h_f$	.....	Espessura de saída
$h$	.....	Espessura ao longo do arco de contato
$h_{ie}$	.....	Espessura de entrada após a zona de compressão elástica
$h_{fe}$	.....	Espessura de saída antes da zona de retorno elástico
$\Delta h$	.....	Redução ( $h_i - h_f$ )
$e$	.....	Deformação convencional
$\varepsilon$	.....	Deformação verdadeira
$\bar{\varepsilon}$	.....	Deformação natural efetiva sob o estado plano de deformação
$V_s$	.....	Velocidade da chapa na saída os cilindros de laminação
$V_e$	.....	Velocidade da chapa na entrada os cilindros de laminação
$V_p$	.....	Velocidade tangencial do cilindro de laminação
$c$	.....	Constante do material
$E_{cilindro}$	.....	Módulo de Young do cilindro de trabalho
$\nu_{cilindro}$	.....	Coefficiente de Poisson do cilindro de trabalho
$E_{tira}$	.....	Módulo de Young da tira
$\nu_{tira}$	.....	Coefficiente de Poisson da tira
$T_i$	.....	Tensão a ré de laminação
$T_f$	.....	Tensão a frente de laminação
$S$	.....	Tensão de escoamento do material sob estado plano de compressão
$S_i$	.....	Tensão de escoamento do material sob estado plano de compressão na entrada
$S_f$	.....	Tensão de escoamento do material sob estado plano de compressão na saída
$\mu$	.....	Coefficiente de atrito
$p_r$	.....	Pressão radial dos cilindros de laminação ( $p_r = p$ para pequenos ângulos)
$\frac{P}{W}$	.....	Carga de laminação dividido pela largura da tira
$\tau_s$	.....	Tensão de cisalhamento na superfície da tira
$B$	.....	Constante do material na curva de fluxo de Swift
$n$	.....	Constante do material na curva de fluxo de Swift
$Y_0$	.....	Constante do material na curva de fluxo de Swift
$AA$	.....	Constantes do material

*BA*..... *Constantes do material*  
*CA*..... *Constantes do material*  
*DA*..... *Constantes do material*  
*EA*..... *Constantes do material*

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS.....</b>	<b>18</b>
2.1	Objetivos gerais.....	18
2.2	Objetivos específicos .....	18
<b>3</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>19</b>
3.1	Características gerais do processo de laminação .....	19
3.2	Relações geométricas básicas na laminação de produtos planos .....	21
3.2.1	O arco de contato.....	21
3.2.2	O ângulo de contato.....	22
3.2.3	A deformação na laminação .....	22
3.2.4	A existência de um ângulo de deslizamento nulo ou ângulo neutro .....	23
3.2.5	A deformação elástica dos cilindros de trabalho.....	24
3.3	A equação diferencial que rege o equilíbrio na laminação de produtos planos .....	27
3.3.1	A equação de von Karman .....	28
3.3.2	O modelo de Orowan .....	30
3.3.3	As aproximações de Bland e Ford.....	33
3.4	Cálculo da carga de laminação a partir da distribuição de pressões .....	35
3.5	A solução numérica de Alexander .....	35
3.5.1	Deslizamento .....	39
3.5.2	Agarramento.....	39
3.5.3	Condições de contorno .....	39
3.5.4	Cálculo da carga de laminação por unidade de largura.....	40
<b>4</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS .....</b>	<b>41</b>
4.1	Equipamentos utilizado.....	41
4.2	Implementação do modelo de Bland e Ford .....	43
4.3	Implementação do modelo de Alexander.....	45
4.4	Programa auxiliar .....	52
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>53</b>
5.1	Tempo de processamento.....	53
5.2	Efeito da variação do coeficiente de atrito.....	53
5.3	Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho .....	59

5.4	Efeito da variação da espessura inicial.....	64
5.5	Efeito da variação da tensão a ré.....	69
5.6	Efeito da variação da tensão a frente.....	74
5.7	Comparação com modelo Non-Circular (não-circular) .....	79
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>91</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>92</b>
	<b>LISTAGENS .....</b>	<b>94</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A laminação é um processo de conformação mecânica que consiste na passagem de um material (chapa, barra, perfil) entre dois cilindros em rotação, de forma a reduzir a área da seção transversal. Dependendo das características do equipamento, pode-se afirmar que a laminação apresenta bom controle dimensional e alta produtividade devido à sua continuidade (HELMAN e CETLIN, 2005).

O cálculo da carga de laminação é um parâmetro crítico na laminação de aço e na configuração do conjunto de laminadores. O comportamento da distribuição da carga de laminação ao longo dos rolos é complicado e é afetado por parâmetros como a temperatura, a geometria dos rolos, tensões a frente e a ré, velocidade de laminação, variações na microestrutura do material sendo laminado (o que leva a variações na tensão de escoamento do material), etc. Os métodos modernos de controle da abertura dos cilindros e do controle de perfil da chapa requerem uma previsão acurada da carga sob diversas condições de laminação, o que justifica a importância deste cálculo (YANG et al., 2004).

O processo de laminação a frio foi mantido como objeto de pesquisa durante várias décadas, atualmente algumas teorias são capazes de proporcionar uma descrição detalhada e valiosa da abertura entre os cilindros de laminação durante o processo (GRIMBLE et al., 1978). Pode-se dizer que os estudos começaram com os trabalhos de Siebel (1925) e von Karman (1925) as quais análises introduziram o conceito de compressão homogênea de segmentos verticais da tira à medida que estas se moviam pela abertura dos cilindros. A ocorrência de uma seção transversal plana neutra e de um ponto neutro ao longo do arco de contato entre os rolos e o metal sendo deformado também foram suposições fundamentais (FRESHWATER, 1996). Uma outra aproximação que introduz uma grande simplificação nas teorias é a de que a interface entre o cilindro de trabalho e a tira assume um perfil circular, o que usualmente leva a erros negligenciáveis. Dentre outras, pode-se citar a utilização de coeficiente de atrito constante, deformação elástica da tira e do cilindro desprezíveis. Entretanto, para certas condições práticas de laminação, por exemplo durante a penúltima e última cadeiras na laminação de chapas finas, os algoritmos baseados na teoria clássica frequentemente não encontram convergência ou diferem muito dos valores mensurados fisicamente (GRIMBLE et al., 1978).

Tendo em vista a dificuldade em conseguir convergência para certas combinações dos parâmetros de laminação entre os vários modelos de cálculo utilizados, outros autores buscaram suprimir as aproximações feitas anteriormente, como por exemplo a introdução de um fator de ajuste para a deformação não-homogênea do material elucidado por Orowan (1943), que estudou também condições de deslizamento e agarramento total da tira no cilindro e buscou

eliminar quaisquer aproximações matemáticas feitas aos modelos de soluções analíticas para o cálculo da distribuição de pressão, força e torque nos cilindros (OROWAN, 1943).

O modelo proposto por Orowan era de grande complexidade para o tempo no qual ele foi deduzido. Tendo em vista isso, notáveis aproximações foram sugeridas por Bland e Ford (1948) e Sims (1945) as quais permitiam o desenvolvimento de soluções analíticas, evitando assim a maioria das integrações numéricas necessárias para a resolução do modelo de Orowan (ALEXANDER, 1971).

Em uma tentativa de produzir resultados com maior exatidão Ford e seus companheiros de pesquisa (Ford, Ellis e Bland, 1951; Lianis e Ford, 1956; Bland e Sims, 1953 apud Alexander, 1971) fizeram modificações consideráveis na teoria da laminação a frio simplificada por Bland e Ford (1948, 1952), levando em consideração a contribuição das zonas elásticas de deformação na entrada e na saída do arco de contato e permitindo em algum grau o efeito do encruamento do material devido à deformação por ele sofrida utilizando-se equações de fluxo.

Com o advento da computação eletrônica digital, a complexidade das equações diferenciais básicas que descrevem qualquer fenômeno físico particular deixou de ser uma barreira à sua solução, foi então que uma solução numérica compreensiva para a equação de von Karman foi apresentada por Alexander (1972 apud Freshwater, 1996), utilizando o modelo de Orowan, que era bastante complexo, desconsiderando, porém, o fator de ajuste da não-homogeneidade da deformação do material. Alexander utilizou o método de Runge-Kutta de quarta ordem para resolver a equação diferencial de primeira ordem de von Karman com determinadas condições de contorno.

Utilizando-se o software de cálculos matemáticos MATLAB<sup>®</sup> implementou-se o modelo de Bland e Ford corrigido pelo raio deformado de Hitchcock e também o modelo proposto por Alexander em seu artigo que é corrigido pelo raio deformado de Hitchcock modificado por Ford (1951). A partir daí compararam-se os dois modelos por meio da execução dos programas escritos variando-se vários parâmetros de laminação para determinados casos de laminação.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivos gerais**

O objetivo deste trabalho é compreender e analisar o desenvolvimento e o comportamento dos principais modelos de cálculo de carga para a laminação a frio.

### **2.2 Objetivos específicos**

- Realizar uma pesquisa bibliográfica sobre quais são e como foram deduzidas as principais equações de cálculo de carga já apresentadas por diversos autores.
- Implementar numericamente os principais modelos.
- Verificar o comportamento dos valores obtidos variando-se alguns parâmetros de laminação, como por exemplo o coeficiente de atrito, o raio do cilindro de laminação, a espessura inicial e as tensões a ré e a frente.
- Comparar o tempo de execução de cada modelo programado.
- Comparar os resultados encontrados com o modelo de arco não circular NONCIRC.

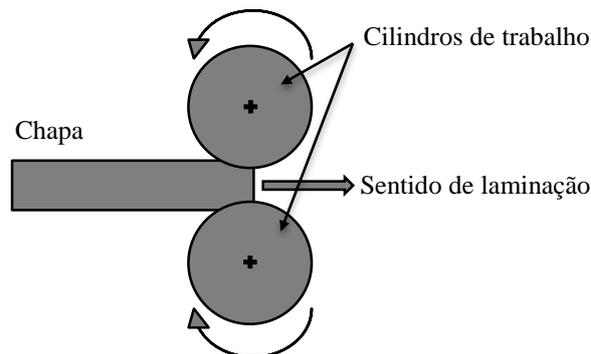
### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A laminação é um processo de conformação mecânica muito utilizado na fabricação de chapas, espessas ou finas. Para manter o processo sobre controle (livre de defeitos), vários parâmetros são controlados, como por exemplo a carga de laminação.

#### 3.1 Características gerais do processo de laminação

Várias configurações da disposição dos cilindros podem ser adotadas, sendo a mais simples composta por dois cilindros de eixos horizontais, dispostos verticalmente um sobre o outro. Esta configuração de laminador é chamada de laminador duo e pode ser ou não reversível. Nos reversíveis, a inversão de rotação dos cilindros possibilita a laminação nos dois sentidos de passagem (HELMAN e CETLIN, 2005). Na figura 1 é exibido a configuração de um laminador duo.

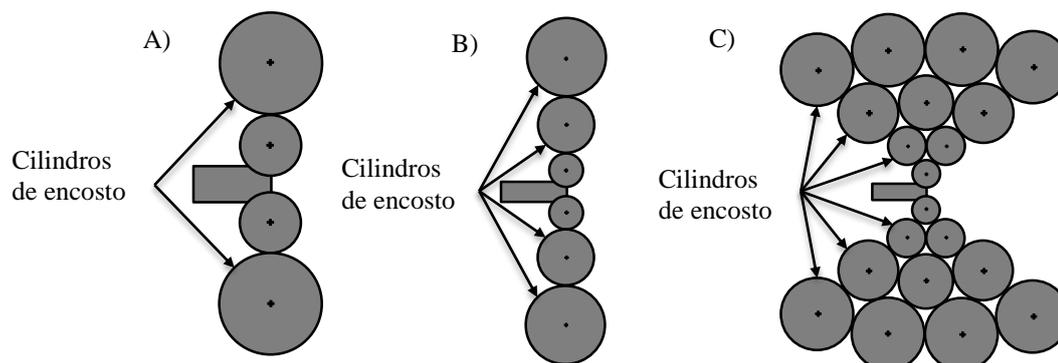
Figura 1 - Laminador duo.



Fonte: Próprio autor.

À medida que se laminam materiais mais finos, é desejável que se utilizem cilindros de trabalho com diâmetros pequenos. Esses cilindros podem fletir, devido à carga de laminação e por isso devem ser apoiados por cilindros mais robustos de encosto. Podendo-se estender o número de cilindros de encosto para dois (laminador quádruplo, figura 2a), quatro (laminador *six-high*, figura 2b) ou até 18 cilindros de encosto (laminador Sendzimir, figura 2c) como mostrado na figura 2.

Figura 2 - A) Laminador quádruo. B) Laminador *Six-High*. C) Laminador Sendzimir.



Fonte: Próprio autor.

Os produtos obtidos pelo processo de laminação podem ser classificados como planos (chapas, tiras, etc) e não-planos (barras, cantoneiras, trilhos, etc). Usualmente tem-se a regulagem da abertura entre os cilindros feita por meio de um sistema de parafusos ou com o acionamento hidráulico. A carcaça (quadro) que suporta os mancais dos cilindros são geralmente de aço ou ferro fundido. Este quadro pode ser aberto na parte superior, fixado por sistemas aparafusados, ou fechado. Os cilindros de laminação podem ser fabricados em aço fundido ou forjado, ou ferro fundido, coquilhado ou não, metal duro, aços ferramenta, etc (HELMAN e CETLIN, 2005).

Os cilindros também podem conter variações no seu diâmetro ao longo do seu comprimento (coroa) no sentido de evitar mudanças na geometria do laminado devido à flexão dos cilindros, ou seja, um diâmetro maior no centro do que nas bordas do cilindro, seguindo uma variação quadrática (PALMEIRA, 2005).

Da apreciação dos conhecimentos sucedidos pelo desenvolvimento da teoria de laminação, pode-se partir para a determinação das forças envolvidas nos processos de deformação mecânica, ou melhor caracterizando, para a determinação da força de laminação. A medida que obtém-se a força ou carga de laminação, é possível calcular as potências e torques envolvidos durante a sequência dos passes dados até a obtenção da dimensão final desejada, por meio do processo de deformação aplicado, considerando o volume como constante (PALMEIRA, 2005).

Dentre os principais fatores que afetam a força de laminação pode-se citar alguns, conforme elaborado por Palmeira (2005):

- Atrito na interface do metal – cilindro.
- Tensões de deformação; pelas leis da plasticidade, para deformar plasticamente um elemento de metal por compressão, é necessário aplicar uma tensão vertical.
- Diâmetro do cilindro; para uma determinada redução em uma chapa de espessura dada, o comprimento do arco de contato é proporcional à raiz quadrada do raio.

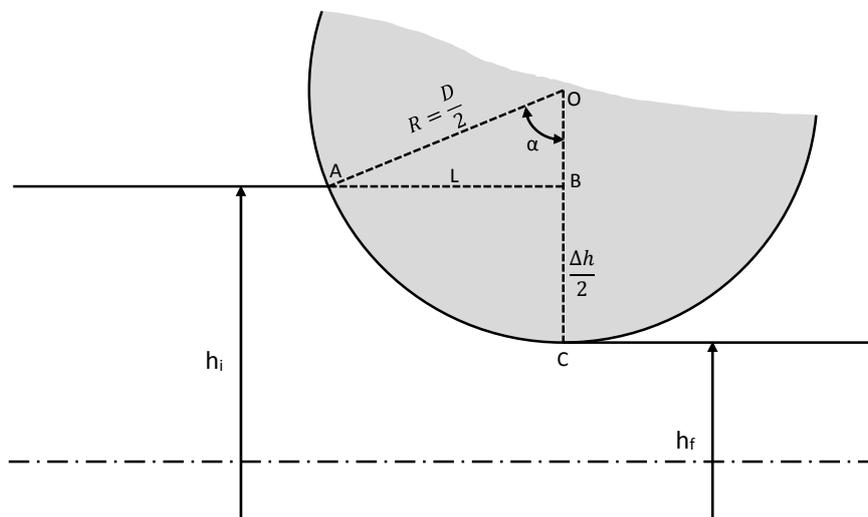
- Velocidade; embora a resistência à deformação aumente com a velocidade, o efeito resultante é muito pequeno. Ao contrário do que poderia esperar, o aumento na velocidade em laminação a frio não exige aumento de potência correspondente por tonelada laminada.
- Trações (tensões); na laminação a quente só se deve aplicar tensões pequenas porque a resistência à deformação sendo baixa, uma tensão forte daria lugar à estrição, originando uma irregularidade na largura. Já em laminações a frio as tensões são frequentemente elevadas.
- Temperatura de laminação, de modo que quanto maior for esta, menor será a força.
- Composição química do aço, que exigirá maior força quanto maior for o seu teor de carbono.
- Redução de espessura, que quanto maior for, maior a força necessária para realizá-lo.
- Superfície dos cilindros, que quanto mais rugosas, maior será a força de laminação exigida.
- Largura; a força total de laminação é sensivelmente proporcional à largura das chapas (PALMEIRA, 2005).

## 3.2 Relações geométricas básicas na laminação de produtos planos

### 3.2.1 O arco de contato

O arco de contato é o arco resultante da interação entre o cilindro de laminação e o material sendo laminado, e está contido entre os pontos limites A e C do contato, como pode ser visto na figura 3 (HELMAN e CETLIN, 2005).

Figura 3 – Relações geométricas na laminação de planos.



Fonte: Adaptado de Helman e Celtin, 2005.

Começando as aproximações, quando o raio do cilindro for muito maior do que a espessura da chapa sendo laminada ( $R \gg h_i$ ), pode-se aproximar o arco de contato AC pela sua projeção horizontal  $\overline{AB} = L$  (equação 1). Dessa forma é possível analisar o triângulo  $A\hat{O}B$  como:

$$L = \sqrt{R^2 - \left(R - \frac{\Delta h}{2}\right)^2} = \sqrt{R\Delta h - \frac{\Delta h^2}{4}} \quad (\text{Forma sem aproximações})$$

Como  $R\Delta h \gg \frac{\Delta h^2}{4}$  tem-se:

$$L = \sqrt{R\Delta h} \quad (1)$$

Neste trabalho um processo iterativo foi desenvolvido para cálculo do comprimento do arco de contato utilizando a forma sem aproximações de  $L$ , e o raio do cilindro deformado após a última iteração. Apesar de o autor Lenard (2007) em seu livro não indicar a utilização do raio deformado para este cálculo, foi verificado que utilizando-se  $R'$  (raio deformado) valores mais próximos da literatura e de outros modelos foram encontrados para  $L$ .

### 3.2.2 O ângulo de contato

O ângulo de contato pode ser definido como o ângulo limitado pela linha  $\overline{OC}$  e o raio  $\overline{AO}$  (figura 3). Podendo ser expresso por (equação 2):

$$\text{sen } \alpha = \frac{L}{R} = \frac{\sqrt{R\Delta h}}{R} = \sqrt{\frac{\Delta h}{R}} \rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\Delta h}{R}} \quad (2)$$

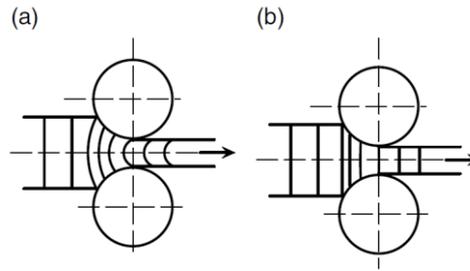
Outra aproximação que pode ser feita é que para ângulos pequenos  $\text{sen } \alpha \cong \alpha$  (HELMAN e CETLIN, 2005). Entretanto, para valores de  $\alpha$  maiores que cerca de  $14^\circ$  (0.244rad) o erro relativo começa a ficar maior do que 1%. Porém, na laminação a frio raramente este valor angular é alcançado.

### 3.2.3 A deformação na laminação

A deformação na laminação para a maioria dos modelos de cálculo é tida como sendo homogênea, ou seja, ao passar pela abertura entre os cilindros as fatias planas de material são comprimidas axialmente e continuam planas durante o processo de redução e após cessar o contato com os cilindros. Essa hipótese é perfeitamente válida para valores de  $L/h > 3$ , pois para valores grandes de comprimento do arco de contato dividido pela espessura média garante-se que a deformação se dê de forma homogênea (MONTMITONNET, 2006).

O conceito de deformação homogênea pode ser melhor visualizado e entendido analisando-se a figura 4, onde na imagem 4a tem-se deformação não-homogênea e na figura 4b tem-se deformação homogênea:

**Figura 4 – A) Compressão não-homogênea. B) Compressão homogênea.**



Fonte: Lenard, 2007.

A deformação convencional da chapa sendo comprimida ao admitir-se a deformação homogênea, ou seja, as seções transversais permanecem planas ao serem deformadas, pode ser dada por (equação 3) (HELMAN e CETLIN, 2005):

$$e = \frac{h_i - h}{h_i} = 1 - \frac{h}{h_i} \quad (3)$$

E a deformação logarítmica ou verdadeira é dada por (equação 4):

$$\varepsilon = \ln \frac{h_i}{h} = \ln \left( \frac{1}{1-e} \right) \quad (4)$$

Ao considerar a região de contato cilindro/chapa como circular, tem-se que a equação que descreve a variação da espessura da chapa ao longo do arco de contato pode ser expressa por, onde  $\varnothing$  varia de 0 até  $\alpha$ :

$$h = h_f + D(1 - \cos\varnothing) \quad (5)$$

Conseqüentemente, substituindo-se a equação (5) na equação (3) e (4):

$$e = 1 - \frac{h_f}{h_i} - \frac{D}{h_i}(1 - \cos\varnothing) \quad (6)$$

Para a deformação logarítmica:

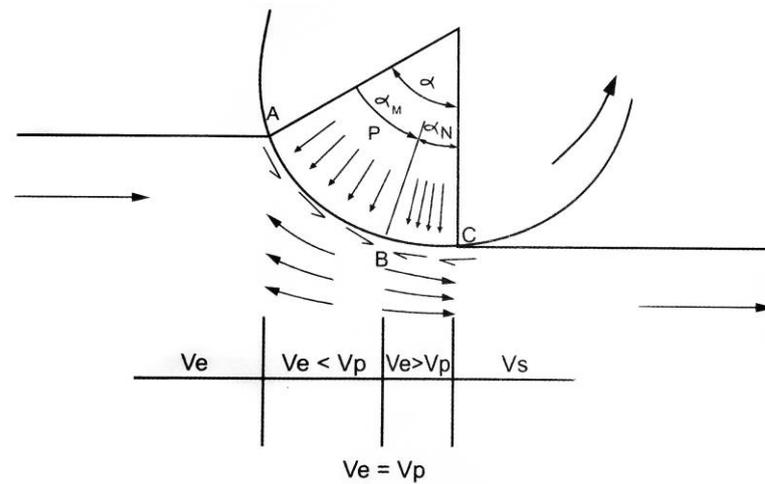
$$\varepsilon = \ln \left( \frac{h_i}{h_f + D(1 - \cos\varnothing)} \right) \quad (7)$$

### 3.2.4 A existência de um ângulo de deslizamento nulo ou ângulo neutro

Sabe-se que a velocidade da chapa ao deixar os cilindros de laminação,  $V_s$ , é maior que a velocidade tangencial do cilindro  $V_p$ . É sabido também que a velocidade da chapa na entrada dos cilindros  $V_e$  é menor do que a velocidade tangencial dos mesmos. Então existirá um plano vertical contido na zona de deformação onde a velocidade da chapa é igual à velocidade tangencial dos cilindros. A este plano é dado o nome de plano neutro, e ao ângulo a ele correspondente, ângulo neutro, simbolizado por  $\alpha_N$  (HELMAN e CETLIN, 2005).

Devido a este padrão específico de deslizamento, as componentes da força de atrito desenvolvidas ao longo do contato são convergentes para o plano neutro, como pode ser verificado na figura 5.

**Figura 5 - Distribuição das tensões de atrito na interface cilindro-metal durante a laminação.**

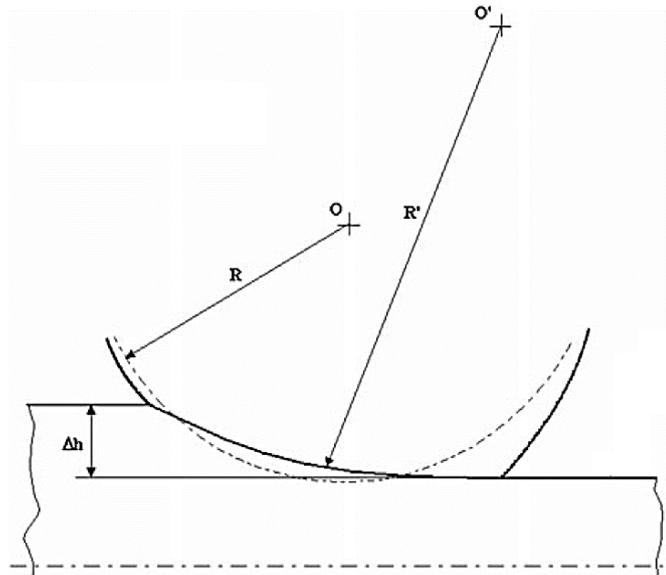


Fonte: Adaptado de Helman e Celtin, 2005.

### 3.2.5 A deformação elástica dos cilindros de trabalho

Nas primeiras e mais simples teorias desenvolvidas para cálculo da carga de laminação os cilindros de trabalho eram considerados como corpos rígidos e que não se deformavam durante o processo. Para a laminação pesada de materiais relativamente macios, esta suposição é válida, porém na laminação de chapas cada vez mais finas e duras os cilindros sofrem uma deformação elástica severa, achatando a sua superfície, exemplificado na figura 6. Então o arco de contato se torna significativamente mais longo do que o arco com cilindros não deformado (ROBERTS, 1978).

**Figura 6 - Raio do cilindro  $R$  e raio deformado do cilindro  $R'$  para uma dada redução  $\Delta h$ .**



Fonte: Adaptado de Krimpelstaetter et al., 2007.

Nas principais equações que determinam a carga de laminação por vários modelos de cálculo diferentes o raio do cilindro deformado  $R'$  é utilizado, que é diferente do raio  $R$  do cilindro. Ao admitir-se que a distribuição de pressões, ao longo do arco de contato, seja aproximadamente elíptica, a teoria da elasticidade nos mostra que o arco continua tendo um perfil circular, porém com um raio  $R'$  maior do que  $R$  (HELMAN e CETLIN, 2005).

O primeiro autor a desenvolver uma relação entre o raio do cilindro e o raio deformado devido à aplicação de uma pressão com distribuição semi-elíptica em uma superfície cilíndrica, foi Hitchcock (1935 apud Roberts, 1978), utilizando a solução de contato de Hertz para corpos elásticos, no qual seus estudos resultaram na equação (8), chamada de equação de Hitchcock, até hoje muito usada:

$$R' = R \left[ 1 + \frac{c}{h_i - h_f} \left( \frac{P}{W} \right) \right] \quad (8)$$

Onde  $P$  é a carga de laminação,  $W$  é a largura da chapa e  $c$  é dado pela equação (9):

$$c = \frac{16(1 - \nu_{cilindro}^2)}{\pi E_{cilindro}} \quad (9)$$

Por sua vez,  $E_{cilindro}$  é o módulo de Young e  $\nu_{cilindro}$  é o coeficiente de Poisson do material do cilindro de laminação.

Entretanto outros pesquisadores mais recentes mostraram que a equação de Hitchcock produz valores conservativos para o raio deformado do cilindro, ou seja, valores menores do que realmente deveriam ser. Invariavelmente, a distribuição de pressão nos cilindros não é semi-elíptica e o perfil deformado do cilindro não é circular. Estudos da mordida do cilindro

(passagem da chapa pela abertura) utilizando câmeras de alta velocidade comprovaram a natureza conservativa da fórmula (ROBERTS, 1978).

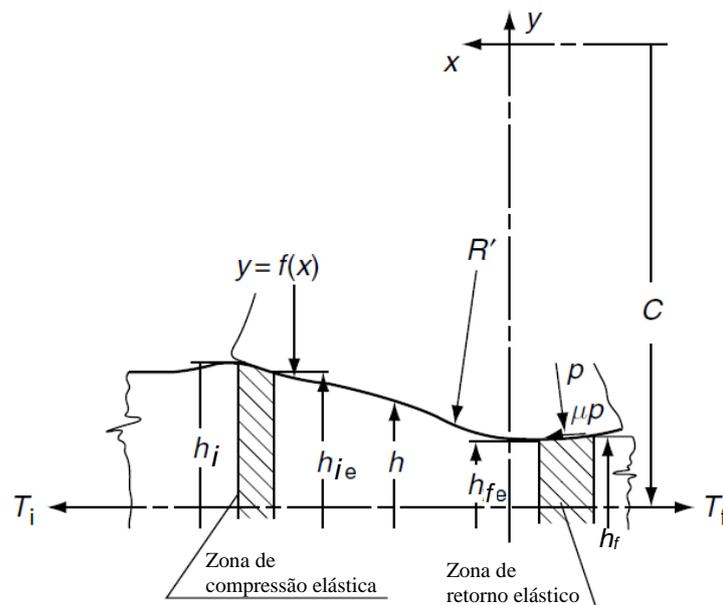
Através de estudos empíricos, Roberts (1978) sugeriu algumas modificações para a equação de Hitchcock, resultando em um novo modelamento para esta equação, que podem ser verificadas a seguir na equação (10):

$$R' = R \left[ 1 + 2 \sqrt{\frac{(P/W)}{E_{cilindro}(h_i - h_f)}} + 2 \frac{(P/W)}{E_{cilindro}(h_i - h_f)} \right] \quad (10)$$

O achatamento dos cilindros foi estudado também por Jortner et al. (1960 apud Lenard, 2007). Os autores consideraram o efeito de uma força pontual ou distribuída diametralmente aplicada na deflexão de um cilindro sólido no estado plano de deformação e mostraram que os cilindros realmente não continuam circulares na zona de deformação. Arcos não circulares também foram estudados por Grimble et al. (1978 apud Lenard, 2007).

De fato, existem zonas de compressão elástica na entrada e uma zona de retorno elástico na saída da mordida do cilindro, onde os esforços permanecem dentro do limite elástico do material, portanto não há deformação plástica do material sendo laminado ainda (figura 7). Tal efeito foi negligenciado por Hitchcock em sua dedução (ROBERTS, 1978).

**Figura 7 - Esquema mostrando a existência de uma zona de compressão elástica e uma zona de retorno elástico.**



Fonte: Adaptado de Lenard, 2007.

Ford et al. (1951) mostraram como a equação de Hitchcock deveria ser modificada para incluir o efeito da deformação elástica na entrada e saída do arco de contato, considerando que o perfil deformado continue a ser circular, que é mostrado a seguir pelas equações (11) a (16):

$$R' = R \left[ 1 + \frac{c}{\left( \sqrt{\Delta h + \delta_{ef} + \delta_t} + \sqrt{\delta_{ef}} \right)^2} \left( \frac{P}{W} \right) \right] \quad (11)$$

$$\Delta h = h_i - h_f \quad (12)$$

$$\delta_{ef} = \frac{(1 - \nu_{tira}^2)(S_f - t_{ef})h_f}{E_{tira}} \quad (13)$$

$$t_{ef} = T_f - \frac{2\mu P_{ef}}{h_f} \quad (14)$$

$$P_{ef} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{R'(1 - \nu_{tira}^2)h_f}{E_{tira}}} (S_f - t_{ef})^{\frac{3}{2}} \quad (15)$$

$$\delta_t = \frac{\nu_{tira}(1 + \nu_{tira})(h_f T_f - h_i T_i)}{E_{tira}} \quad (16)$$

Neste conjunto de equações as variáveis possuem o seguinte significado:

- $\nu_{tira}$  é o coeficiente de Poisson do material sendo laminado.
- $E_{tira}$  é o modulo de Young do material sendo laminado.
- $S_f$  é a tensão de escoamento no estado plano de deformação na saída do arco de contato.
- $T_f$  é a tensão a frente na laminação.
- $T_i$  é a tensão a ré na laminação.

No trabalho escrito por Alexander (1971) é evidenciado que  $t_{ef}$  e  $P_{ef}$  devem ser calculados de forma iterativa, pois dependem um do outro. O raio deformado utilizado para o cálculo de  $P_{ef}$  pode ser aproximado inicialmente utilizando-se a equação básica de Hitchcock e o primeiro valor de  $t_{ef}$  pode ser estimado como sendo igual a  $T_f$ . Novamente de forma iterativa a carga de laminação por unidade de largura  $\left(\frac{P}{W}\right)$  deve ser recalculada até conseguir-se valores compatíveis de  $\frac{P}{W}$  e  $R'$  utilizando-se o raio deformado corrigido por Ford.

### 3.3 A equação diferencial que rege o equilíbrio na laminação de produtos planos

A maioria dos modelos de uma dimensão são baseados no método de equilíbrio no qual um bloco de material (*slab method*) é isolado e o balanço de todas as forças horizontais e

verticais atuantes é usado para desenvolver uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (LENARD, 2007).

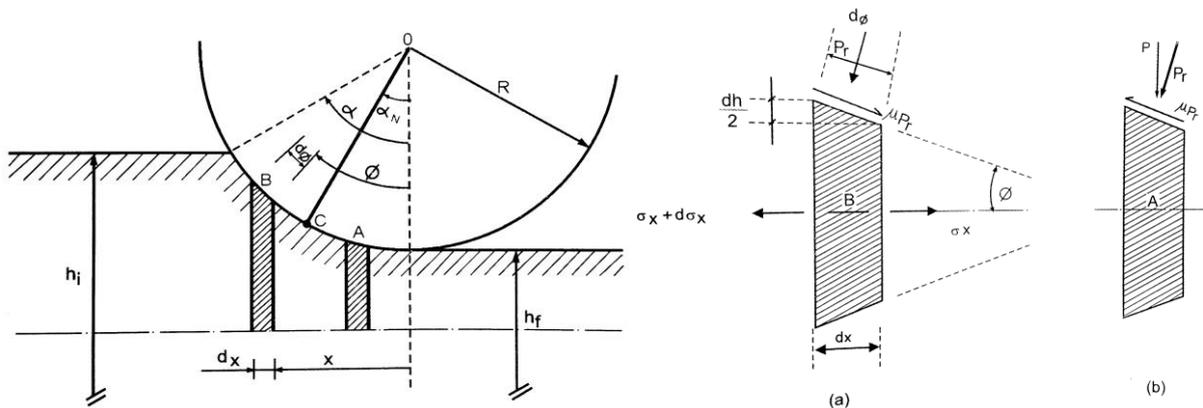
### 3.3.1 A equação de von Karman

O primeiro autor a apresentar esta equação foi von Karman (1925). Para isso as seguintes condições foram admitidas (HELMAN e CETLIN, 2005):

- Estado plano de deformação.
- Deformação homogênea em cada plano.
- Coeficiente de atrito constante (atrito de Coulomb).
- Arco de contato circular (de raio deformado  $R'$ ).
- Existência de um ponto neutro dentro do arco de contato.
- Deformação elástica da tira é desprezada.

A seguir são mostrados os passos básicos para a dedução baseando-se na figura 8.

**Figura 8 - Blocos para análise de tensões e as tensões agindo nos blocos (a) e (b).**



Fonte: Adaptado de Helman e Celtin, 2005.

Na figura 8a é mostrado um ponto genérico ao lado esquerdo (região de entrada) do ponto neutro C e a figura 8b mostra um ponto genérico qualquer à direita (região de saída) do ponto neutro.

As tensões longitudinais geram forças que podem ser relacionadas por:

$$(\sigma_x + d\sigma_x)(h + dh) - h\sigma_x$$

A pressão radial dos dois cilindros na direção  $x$  geram forças que podem ser escritas como:

$$2 \left( p_r \frac{dx}{\cos\phi} \right) \sin\phi$$

A força de atrito nos dois cilindros na direção  $x$  pode se expressa como, considerando o atrito como coulombiano (*força de atrito =  $\mu \times$ força normal*):

$$\pm 2\mu \left( p_r \frac{dx}{\cos\emptyset} \right) \cos\emptyset$$

Aplicando-se a condição de equilíbrio onde  $\sum F_x = 0$  e desprezando-se o produto de dois infinitesimais, obtém-se a equação (17):

$$\sigma_x dh + h d\sigma_x + 2p_r dx \operatorname{tg}\emptyset \pm 2\mu p_r dx = 0 \quad (17)$$

Para os sinais  $\pm$  considera-se:

+ para a região de saída ( $0 \leq \emptyset \leq \alpha_N$ )

– para a região de entrada ( $\alpha_N \leq \emptyset \leq \alpha$ )

Utilizando-se a relação  $dh = 2dx * \operatorname{tg}\emptyset$  na equação (17), obtém-se:

$$\sigma_x dh + h d\sigma_x + p_r dh \pm \mu p_r \cot g\emptyset dh = 0$$

Podendo ser simplificada para a equação (18):

$$d(h\sigma_x) = -p_r dh(1 \pm \mu \cot g\emptyset) \quad (18)$$

A equação (18) é composta por duas equações ordinárias independentes de primeira ordem, contendo quatro variáveis dependentes:  $\sigma_x$ ,  $p_r$ , e  $h$ , os quais dependem do raio deformado do cilindro  $R'$ , e o coeficiente de atrito  $\mu$  (LENARD, 2007).

As equações independentes adicionais são obtidas da teoria da plasticidade e da geometria na zona de deformação. Da teoria da plasticidade, retira-se o critério de Huber-Mises como critério de escoamento do material, que relaciona as componentes de tensão na direção da laminação e perpendiculares a ela com a resistência ao escoamento. Assumindo-se um estado plano de deformações, o critério pode ser identificado como (HELMAN e CETLIN, 2005):

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2K = S$$

Onde  $K$  representa a resistência ao escoamento do material sob cisalhamento puro, e  $S$  é então a resistência ao escoamento do material no estado plano de deformação. Para o caso da laminação  $\sigma_1 = \sigma_x$  e  $\sigma_3 = -p_r \approx -p$  (para pequenos ângulos,  $p_r$  é muito próximo de sua componente vertical  $p$ ), então tem-se:

$$\sigma_x + p = S \rightarrow \sigma_x = S - p \quad (19)$$

Substituindo-se a equação (19) na equação (18) obtém-se a equação (20):

$$d(hS - hp) = -p dh(1 \pm \mu \cot g\emptyset) \quad (20)$$

A outra variável faltante é a variação da espessura da tira durante a passagem pela abertura, ou seja, a descrição matemática da superfície de contato. Ao considerar que o arco de contato mantém sua forma cilíndrica durante o processo, essa variação pode ser dada pela equação (21):

$$h = h_f + 2R'(1 - \cos\phi) \quad (21)$$

Sob a forma diferencial, tem-se (equação (22)):

$$dh = 2R'\sin\phi d\phi \quad (22)$$

Substituindo-se a equação (22) na equação (20), obtém-se:

$$d(hS - hp) = -p2R'\sin\phi(1 \pm \mu\cot\phi)d\phi$$

Sob outra forma tem-se:

$$\frac{d\left(hS\left(1-\frac{p}{S}\right)\right)}{d\phi} = -p2R'\sin\phi(1 \pm \mu\cot\phi)$$

Finalmente obtém-se a equação de von Karman (equação (23)):

$$hS \frac{d\left(1-\frac{p}{S}\right)}{d\phi} + \left(1 - \frac{p}{S}\right) \frac{d(hS)}{d\phi} = -p2R'(\sin\phi \pm \mu\cos\phi) \quad (23)$$

Esta equação é de difícil integração, ainda que seja fácil obter-se uma solução numérica, por meio de algoritmos (HELMAN e CETLIN, 2005).

### 3.3.2 O modelo de Orowan

Os modelos propostos para resolver a equação de von Karman dificilmente concordavam entre si devido às diversas aproximações e simplificações feitas na tentativa de resolução. No trabalho publicado por Orowan (1943), as aproximações matemáticas foram em sua maioria deixadas de lado. Orowan descartou a teoria da compressão homogênea, assumindo que existiria uma distribuição de tensões ao longo de uma seção transversal dentro da zona plástica de deformação aproximadamente igual à distribuição de tensões que ocorre durante a compressão de um material plástico por duas superfícies planas inclinadas com o mesmo ângulo e atrito superficial. Considerando que a distribuição de tensões em qualquer seção transversal depende de valores locais da tensão de escoamento e do atrito superficial. Uma solução para as tensões em coordenadas polares pode ser dada por (FRESHWATER, 1996):

$$p_t = p_\theta - S\sqrt{\left(1 - a^2\left(\frac{\theta}{\phi}\right)^2\right)}$$

$$p_\theta = \text{constante}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_s \frac{\theta}{\phi}$$

$$a = \frac{2\tau_s}{S}, 0 < a < 1$$

Onde, para qualquer seção transversal circular na zona plástica de deformação que toca a superfície do cilindro perpendicularmente em qualquer posição definida pela coordenada angular  $\phi$  (figura 9) tem-se (FRESHWATER, 1996):

$p_t$  é a pressão radial.

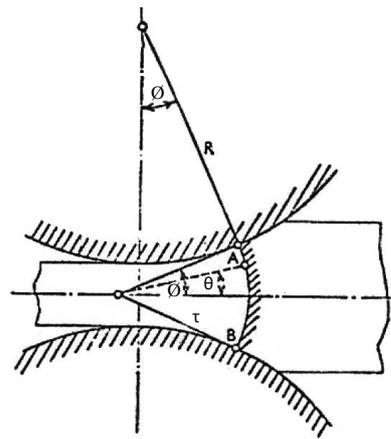
$p_\theta$  é pressão tangencial (normal à pressão dos cilindros  $p$ ).

$\tau_s$  é a tensão de cisalhamento na superfície da tira.

$\tau_{r\theta}$  é a tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal circular.

$\theta$  é a coordenada angular ao longo da seção transversal circular,  $-\phi < \theta < \phi$ .

**Figura 9 - Seção transversal circular na zona plástica de deformação que toca a superfície do cilindro perpendicularmente em qualquer posição.**



Fonte: Adaptado de Orowan, 1943.

O critério para a deformação homogênea no estado plano de deformação  $\sigma_1 - \sigma_3 = 2K = S$  é incorporado nas relações para as tensões. A força horizontal  $f(\phi)$  sobre qualquer seção transversal ligando dois pontos diametralmente opostos na superfície do cilindro de coordenada  $\phi$  pode ser obtida pela integração das tensões sobre a seção transversal circular que liga estes mesmo pontos e é dada pela equação (24) (FRESHWATER, 1996):

$$f(\phi) = h \left[ p_r - S\omega(\phi, a) \pm \left( \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\tan\phi} \right) \tau_s \right] \quad (24)$$

A variável  $h$  é a espessura local e  $p_r$  é a pressão normal aos cilindros (equivalente à variável  $p$  no modelo de von Karman, quando a aproximação para pequenos ângulos é utilizada). Nos sinais duplos, o sinal superior é referente às condições entre o ponto neutro e a saída, e o sinal inferior refere-se às condições encontradas entre o ponto neutro e a região de entrada. E  $\omega(\phi, a)$  é um fator numérico  $\pi/4 < \omega < 1$  derivado da distribuição de tensões não homogênea devido à tensão de cisalhamento na superfície do cilindro  $\tau_s$  (FRESHWATER, 1996).

$$\omega(\phi, a) = \frac{1}{\text{sen}\phi} \int_0^\phi \left[ \sqrt{1 - a^2(\theta/\phi)^2} \right] \cos\theta d\theta \quad (25)$$

Onde  $a = \frac{2\tau_s}{S}$ ,  $0 < a < 1$  e expressa o arraste causado pelo atrito como uma fração da tensão de escoamento. A deformação da tira se aproxima da compressão homogênea quando  $a \rightarrow 0$  e  $\omega = 1$  (FRESHWATER, 1996).

O equilíbrio de forças em termos da força horizontal  $f(\phi)$  para um elemento de seção na mordida dos cilindros pode ser dado pela equação (26):

$$df/d\phi = 2R' (p_r \text{sen}\phi \pm \tau_s \text{cos}\phi) \quad (26)$$

Esta equação diferencial de controle de Orowan pode ser resolvida diretamente rescrevendo-se a equação (26) na forma das equações (27 e 28) para os casos de deslizamento e agarramento respectivamente.

### 3.3.2.1 Deslizamento

$$0 < a = 2\mu p_r / S < 1 \rightarrow \tau_s = \mu p_r \quad (26.1)$$

A equação (26.1) relaciona a razão entre duas vezes o produto do coeficiente de atrito pela pressão radial do cilindro e a tensão de escoamento sob estado plano de deformação do material, caso este valor estiver dentro do intervalo (0,1), o cálculo da tensão de cisalhamento deve ser dado por  $\tau_s = \mu p_r$ . Isto significa que há deslizamento entre a chapa e o cilindro. Então a equação (26) pode ser resolvida da seguinte maneira:

$$df/d\phi = \beta_1(\phi)f + \beta_2(\phi) \quad (27)$$

$$p_r \left[ 1 \pm \mu \left( \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\tan\phi} \right) \right] = \frac{f}{h} + S\omega(\phi, a) \quad (27a)$$

$$\beta_1(\phi) = \frac{2R'}{h} [\text{sen}\phi \pm \mu \text{cos}\phi] / \left[ 1 \pm \mu \left( \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\tan\phi} \right) \right] \quad (27b)$$

$$\beta_2(\phi) = 2R' S\omega(\phi, a) [\text{sen}\phi, a] [\text{sen}\phi \pm \mu \text{cos}\phi] / \left[ 1 \pm \mu \left( \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\tan\phi} \right) \right] \quad (27c)$$

OBS: Não possui-se certeza da equação para o cálculo de  $\beta_2$ , visto que a fonte consultada apresenta aparentemente erros de digitação (FRESHWATER, 1996).

### 3.3.2.2 Agarramento

$$a = 1 \rightarrow \tau_s = \frac{S}{2} \quad (27.1)$$

Para a condição de agarramento a equação (27.1) deve ser utilizada, a tensão de cisalhamento é igual ao limite de resistência ao cisalhamento do material, por isso, o valor desta tensão não pode ser maior do que este limite. Então tem-se a condição de agarramento entre o cilindro e a chapa.

$$df/d\phi = \beta_3(\phi)f + \beta_4(\phi) \quad (28)$$

$$p_r = \frac{f}{h} + S \left[ \omega(\phi, 1) \mp \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\tan\phi} \right) \right] \quad (28a)$$

$$\beta_3(\emptyset) = \frac{2R'}{h} \text{sen}\emptyset \quad (28b)$$

$$\beta_4(\emptyset) = 2R'S \left[ \left\{ \omega(\emptyset, 1) \mp \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\emptyset} - \frac{1}{\tan\emptyset} \right) \right\} \text{sen}\emptyset \pm \frac{1}{2} \text{cos}\emptyset \right] \quad (28c)$$

### 3.3.3 As aproximações de Bland e Ford

Bland e Ford (1948) sugeriram algumas simplificações para a equação (23) de von Karman de modo que uma solução analítica fosse possível. Segundo Helman e Celtin (2005) na maioria dos processos de laminação, a variação da pressão de laminação com a posição sobre o arco de contato é muito maior que a variação da tensão de escoamento. E também a variação do produto  $hS$  é ainda menor, visto que ao elevar-se  $S$ , o valor de  $h$  é diminuído. Deste modo aceita-se que:

$$hS \frac{d\left(\frac{1-p}{S}\right)}{d\emptyset} \gg \left(1 - \frac{p}{S}\right) \frac{d(hS)}{d\emptyset}$$

Esta aproximação não é válida quando o material encrua muito rapidamente, ou quando se aplica uma tração a ré elevada, pois isto faz com que a variação de  $\frac{p}{S}$  sobre o arco de contato reduza (HELMAN e CETLIN, 2005).

Então a equação (23) se torna:

$$hS \frac{d}{d\emptyset} \left( \frac{p}{S} \right) = 2R'p(\text{sen}\emptyset \pm \mu \text{cos}\emptyset) \quad (29)$$

Novamente utilizando a aproximação para pequenos ângulos:

$$\text{sen}\emptyset \cong \emptyset \quad \text{cos}\emptyset \cong 1 - \frac{\emptyset^2}{2}$$

Então a equação (5) pode ser escrita como:

$$h = h_f + 2R'(1 - \text{cos}\emptyset) \cong h_f + 2R' \frac{\emptyset^2}{2}$$

Então a equação (29) se torna:

$$\frac{d}{d\emptyset} \left( \frac{p}{S} \right) = 2R' \frac{p}{S} \frac{\emptyset \pm \mu}{h_f + 2R'\emptyset^2} \rightarrow \frac{d(p/S)}{(p/S)} = \frac{2\emptyset d\emptyset}{\frac{h_f}{R'} + \emptyset^2} \pm \frac{2\mu d\emptyset}{\frac{h_f}{R'} + \emptyset^2} \quad (30)$$

A equação (30) é de fácil integração, resultando:

$$\ln(p/S) = \ln\left(\frac{h_f}{R'} + \emptyset^2\right) \pm 2\mu \frac{1}{\sqrt{\frac{h_f}{R'}}} \text{arctg} \frac{\emptyset}{\sqrt{\frac{h_f}{R'}}} + cte$$

Adotando:

$$H = 2 \sqrt{\frac{R'}{h_f}} \text{arctg} \left( \sqrt{\frac{R'}{h_f}} \emptyset \right) \quad (31)$$

Resultando em:

$$\ln \frac{p}{s} = \ln \left( \frac{h}{R'} \right) \pm \mu H + cte$$

Sob outra forma:

$$\frac{p^+}{s} = C_1 \frac{h}{R'} \exp(+\mu H) \quad \text{Válida para a região de saída} \quad (32)$$

$$\frac{p^-}{s} = C_2 \frac{h}{R'} \exp(-\mu H) \quad \text{Válida para a região de entrada} \quad (33)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  podem ser calculadas por meio das condições de contorno:

### 3.3.3.1 Sem aplicação de tensões externas

Nesta situação tem-se  $\sigma_{Xi} = \sigma_{Xf} = 0$ , onde os sub índices  $i$  e  $f$  representam os valores das variáveis na entrada da laminação e saída respectivamente, então a equação (32) se torna:

$$\frac{p_f^+}{s_f} = C_1 \frac{h_f}{R'} \exp(+\mu H_f)$$

Sendo  $H_f = H(\phi_f)$  e  $\phi_f = 0$ , resultando em  $H_f = 0$ . Pelo critério de escoamento tem-se  $p_f = S_f - \sigma_{Xf} = S_f$ , conseqüentemente obtém-se:

$$C_1 = \frac{R'}{h_f}$$

Na região de entrada tem-se  $\sigma_{Xi} = 0$  e  $\phi = \alpha$ , além disso,  $p_i = S_i - \sigma_{Xi} = S_i$ , obtendo-se:

$$C_2 = \frac{R'}{h_i} \exp(\mu H_i), \text{ sendo } H_i = H(\alpha).$$

Finalmente obtém-se:

$$\frac{p^+}{s} = \frac{h}{h_f} \exp(+\mu H) \quad \text{para a saída} \quad (34)$$

$$\frac{p^-}{s} = \frac{h}{h_i} \exp(\mu(H_i - H)) \quad \text{para a entrada} \quad (35)$$

### 3.3.3.2 Com aplicação de tensões externas

Utiliza-se a denominação  $T_i$  e  $T_f$  para as tensões na entrada e na saída do laminador respectivamente. Recalculando-se as constantes  $C_1$  e  $C_2$  obtém-se as seguintes equações (HELMAN e CETLIN, 2005):

$$\frac{p^+}{s} = \left( 1 - \frac{T_f}{S_f} \right) \frac{h}{h_f} \exp(+\mu H) \quad \text{Para a saída} \quad (36)$$

$$\frac{p^-}{s} = \left( 1 - \frac{T_i}{S_i} \right) \frac{h}{h_i} \exp(\mu(H_i - H)) \quad \text{Para a entrada} \quad (37)$$

### 3.4 Cálculo da carga de laminação a partir da distribuição de pressões

A partir da distribuição de pressões, pode-se calcular a força de laminação como sendo (HELMAN e CETLIN, 2005):

$$\frac{P}{w} = \int_0^L p dx \quad (38)$$

Porém, sabe-se que a função  $p$  é expressa em função da variável angular  $\emptyset$ , então é usual utilizar-se a seguinte mudança de variável (HELMAN e CETLIN, 2005):

$$dx = R' d\emptyset \cos\emptyset \approx R' d\emptyset \left(1 - \frac{\emptyset^2}{2}\right)$$

Na maioria dos casos é válida a aproximação  $dx = R' d\emptyset$ , assim pode-se rescrever a equação (38) da seguinte maneira:

$$\frac{P}{w} = \int_0^\alpha p(\emptyset) R' d\emptyset = R' \left( \int_0^{\alpha_N} p^+(\emptyset) d\emptyset + \int_{\alpha_N}^\alpha p^-(\emptyset) d\emptyset \right) \quad (39)$$

Baseando-se no método de Bland e Ford, as equações (29 e 30) permitem calcular o ângulo neutro ao se igualar ambas as equações:

$$p^+ = p^-$$

Resolvendo-se a igualdade obtém-se:

$$\alpha_N = \sqrt{\frac{h_f}{R'}} \tan \left[ \sqrt{\frac{h_f}{R'}} \frac{H_N}{2} \right] \quad (40)$$

Sendo:

$$H_N = \frac{H_i}{2} - \frac{1}{2\mu} \ln \left[ \frac{h_i}{h_f} \cdot \frac{\left(1 - \frac{T_f}{S_f}\right)}{\left(1 - \frac{T_i}{S_i}\right)} \right] \quad (41)$$

### 3.5 A solução numérica de Alexander

Utilizando-se o mesmo método de abordagem usado por Orowan, Alexander (1971) mostrou como qualquer problema de laminação pode ser solucionado rapidamente e com eficiência. Porém para facilitar a apresentação e entendimento do seu estudo, ele optou por não considerar nenhum fator que permitiria a deformação não-homogênea, considerando ainda que para laminação a frio de chapas de pequena espessura, a maior parte das vezes a deformação irá ocorrer de maneira homogênea em toda espessura. Alexander afirma que a função de não-homogeneidade de Orowan deveria ser melhorada, por meio do desenvolvimento de soluções que descrevam propriamente a deformação, mas não deixa de comentar que a função de Orowan seria de fácil implementação no seu programa de solução numérica.

O modelo de Alexander é tão abrangente, que com as devidas correções, pode ser aplicado até para a laminação a quente, como demonstrado por (CHEN et al., 2014) em seu artigo.

Alexander utilizou em sua solução a equação de fluxo de Swift, que permite que haja encruamento do material durante a laminação e que pode ser dada por:

$$Y = Y_0(1 + B\bar{\epsilon})^n \quad (42)$$

Onde  $Y$  é a resistência à tração uniaxial,  $Y_0$  é um valor inicial (constante do material),  $\bar{\epsilon}$  é a deformação natural efetiva sob deformação plana ( $\bar{\epsilon} = (2/\sqrt{3})\epsilon$ ),  $B$  e  $n$  são outras constantes do material (ALEXANDER, 1971). Lembrando que a tensão de escoamento no estado plano de deformação é dada por:  $S = (2/\sqrt{3})Y$ .

Então a tensão de escoamento no estado plano de deformação para a dedução de Alexander é dada pela equação a seguir:

$$S = \frac{2}{\sqrt{3}}Y_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}B \ln \frac{h_i}{h}\right)^n$$

Em sua dedução é necessário saber-se o valor de  $dS/d\phi$ , sabendo que  $h$  é dado pela equação (5), tem-se:

$$\frac{dS}{d\phi} = \frac{-\frac{8}{3}Y_0 n B R' \sin\phi \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}B \ln \frac{h_i}{h}\right)^{n-1}}{h}$$

Seu método consegue lidar facilmente com as condições de contorno misturadas introduzidas por Orowan em seu estudo no que diz respeito ao deslizamento ou agarramento durante a mordida do cilindro. Isso é melhor demonstrado pela expressão: realiza-se o cálculo de  $\tau_s = \mu p_r$  e  $\tau_s = S/2$ , e utiliza-se o resultado que der o menor valor. Ou seja, para o cálculo da tensão de cisalhamento o programa deverá utilizar a fórmula que resultar em um menor valor: para a condição de deslizamento a tensão de cisalhamento ( $\tau_s$ ) é dada pelo produto da pressão radial ( $p_r$ ) pelo coeficiente de atrito ( $\mu$ ) e para a condição de agarramento total a tensão de cisalhamento não pode ser maior do que a própria tensão de cisalhamento do material da chapa ( $K=S/2$ ) (ALEXANDER, 1971).

Alexander (1971) considerou a equação básica de von Karman sob esta forma:

$$d[h(p_r - S \mp \tau_s \tan\phi)]/d\phi = 2R'(p_r \sin\phi \pm \tau_s \cos\phi) \quad (43)$$

Na equação acima o sinal algébrico superior se refere à situação na saída da chapa e o sinal inferior é referido à entrada. A figura 10 exemplifica o posicionamento de várias variáveis que serão utilizadas nesta parte do trabalho.



- $T_f$  representa a tensão aplicada na saída;
- $t_{ei}$  representa a tensão na entrada aplicada efetivamente na zona plástica;
- $t_{ef}$  representa a tensão na saída aplicada efetivamente na zona plástica.

Alexander utilizou ainda a equação (5),  $h = h_f + 2R'(1 - \cos\phi)$ , para o cálculo da variação da espessura ao longo do arco de contato.

Duas condições de atrito poderiam existir na disposição deste modelo:

### 3.5.1 Deslizamento

$$\tau_s = \mu p_r$$

Ao substituir-se  $\tau_s = \mu p_r$  na equação (43) chega-se a uma equação diferencial da seguinte forma:

$$\frac{dp_r}{d\phi} = g_{1(\phi)} p_r + g_{2(\phi)} \quad (44)$$

Onde:

$$g_{1(\phi)} = \frac{\pm \mu \sec\phi \left( \frac{2R'}{h} + \sec\phi \right)}{(1 \mp \mu \tan\phi)} \quad (45)$$

$$g_{2(\phi)} = \frac{\left( \frac{2R'S}{h} \sec\phi + \frac{dS}{d\phi} \right)}{(1 \mp \mu \tan\phi)} \quad (46)$$

### 3.5.2 Agarramento

$$\tau_s = \frac{S}{2}$$

$$\frac{dp_r}{d\phi} = g_{3(\phi)} \quad (47)$$

$$g_{3(\phi)} = S \left\{ \frac{2R'}{h} \sec\phi \left( 1 \pm \frac{1}{2} \tan\phi \right) \pm \left( \frac{R'}{h} \cos\phi + \frac{1}{2} \sec^2\phi \right) \right\} + \left( 1 \pm \frac{1}{2} \tan\phi \right) \frac{dS}{d\phi} \quad (48)$$

Nos sinais duplos das equações acima o sinal superior é referente às condições entre o ponto neutro e a saída, e o sinal inferior refere-se às condições encontradas entre o ponto neutro e a região de entrada (ALEXANDER, 1971).

### 3.5.3 Condições de contorno

Nos planos de entrada e saída da zona plástica de deformação, as condições de contorno são determinadas a partir da equação de equilíbrio de um elemento da chapa mostrado na figura 10. Isto é:

$$\sigma_3 R' \delta\phi \cos\phi = p_r R' \delta\phi \cos\phi \mp \tau_s R' \delta\phi \sin\phi \text{ ou } \sigma_3 = p_r \mp \tau_s \tan\phi \quad (49)$$

Nos sinais duplos das equações acima o sinal superior é referente às condições entre o ponto neutro e a saída (ALEXANDER, 1971).

As forças de compressão vertical e lateral podem ser relacionadas pelo critério de escoamento Huber-Mises:

$$\sigma_3 - \sigma_1 = 2K = S \rightarrow \sigma_1 = \sigma_3 - S$$

Obtendo-se a seguinte relação:

$$\sigma_1 = p_r - S \mp \tau_s \tan \phi \quad (50)$$

Então na entrada da zona plástica do arco de contato, quando  $\phi = \alpha$ ,  $S = S_i$  e  $\sigma_1 = -t_{ei}$ , a pressão no cilindro é dada por:

$$p_{ri} = S_i - t_{ei} - \tau_s \tan \alpha \quad (51)$$

Ou:

$$p_{ri} = (S_i - t_{ei}) / (1 + \mu \tan \alpha) \text{ se } \tau_{si} = \mu p_{ri} \quad (52)$$

$$t_{ei} = T_i - \frac{2\mu P_{ei}}{h_i} \quad (53)$$

$$P_{ei} = \frac{(1-\nu^2)h_i}{4} \frac{(S_i - t_{ei})^2}{E} \sqrt{\frac{R'}{h_i - h_f}} \quad (54)$$

E na saída, como  $\phi = 0$ :

$$p_{rf} = S_f - t_{ef} \quad (55)$$

$$t_{ef} = T_f - \frac{2\mu P_{ef}}{h_f} \quad (56)$$

$$P_{ef} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{R'(1-\nu^2)h_f}{E}} (S_f - t_{ef})^{\frac{3}{2}} \quad (57)$$

### 3.5.4 Cálculo da carga de laminação por unidade de largura

Assumindo que a superfície de contato continua circular e não considerando as zonas elásticas de deformação dentro do arco, a carga de laminação por unidade de largura  $\left(\frac{P}{w}\right)$  deve atuar em uma direção dada pela metade do ângulo do arco de contato e aponta para o centro do raio deformado do cilindro. Levando isso em consideração a carga de laminação é dada em função da projeção de  $p_r$  e  $\tau_s$  nesta direção e dada pela equação a seguir (ALEXANDER, 1971):

$$\frac{P}{w} = R' \int_0^\alpha p_r \cos\left(\phi - \frac{1}{2}\alpha\right) d\phi + R' \left[ \int_{\alpha_N}^\alpha \tau_s \text{sen}\left(\phi - \frac{1}{2}\alpha\right) d\phi - \int_0^{\alpha_N} \tau_s \text{sen}\left(\phi - \frac{1}{2}\alpha\right) d\phi \right] \quad (58)$$

Então a carga total de laminação/largura considerando a contribuição das zonas elásticas de deformação é dado pelo somatório de:

$$P = \frac{P}{w} + P_{ei} + P_{ef} \quad (59)$$

## 4 MATERIAIS E MÉTODOS

O foco deste trabalho foi a simulação numérica de dois casos de laminação, por isso o material utilizado está representado somente pela sua curva de escoamento, que é mostrada na figura 11, não se tratando especificamente de um material com nome comercial.

### 4.1 Equipamentos utilizado

O equipamento utilizado para a execução dos programas foi um computador pessoal com as seguintes características de hardware:

- Processador QuadCore Intel Core i5-4670K, @4000 MHz
- Memória 2 x 8GB DDR3-1333 G Skill RipjawsX
- Placa-mãe ASRock Z97 Killer
- Disco SSD SanDisk (128 GB, SATA-III)
- Adaptador de Vídeo Intel HD Graphics 4600
- Microsoft Windows 8.1 Professional

Utilizando-se o software de programação numérica MATLAB<sup>®</sup> versão R2015a, foi implementado o modelo de cálculo de carga de laminação desenvolvido por Bland e Ford (1948) (BF) e o modelo proposto por Alexander (1971) (AX). Baseou-se todos os estudos nos parâmetros de laminação abordados por Abdelkhalek et al. (2011) em vários de seus artigos que tratam de defeitos de planicidade em chapas laminadas a frio. Este caso foi nomeado convenientemente de “Caso 1” e representa um dos últimos passes de laminação a frio na fabricação de chapas finas, onde o material já se encontra bem encruado. Os principais parâmetros de laminação para o Caso 1 e seus respectivos valores estão representados abaixo:

```

hi=0.355; %input('Qual é a espessura inicial? (mm)')
hf=0.252; %input('Qual é a espessura final? (mm)')
R=555/2; %input('Qual é o raio do cilindro de trabalho? (mm)')
AA=470.5; %input('Quais são os coeficientes da curva de fluxo
(AA+BA*ε)*(1-CA*exp(-DA*ε))-EA (MPa)
BA=175.4;
CA=0.45;
DA=8.9;
EA=25;

Etira=210000; %input('Qual é módulo de Young da tira? (MPa)')
Ecilindro=210000; %input('Qual é módulo de Young do cilindro? (MPa)')
vtira=0.3; %input('Qual é o coeficiente de Poisson da tira?')
vcilindro=0.3; %input('Qual é o coeficiente de Poisson do cilindro?')

```

```

u=0.0202684852225944; %input('Qual é o coeficiente de atrito?')
Ti=170; %input('Qual é a tensão de tração na entrada? (MPa)')
Tf=100; %input('Qual é a tensão de tração na saída? (MPa)')
eac=2.05; %input('Qual a deformação acumulada?')
PD=2/sqrt(3); %input('Converter para estado plano de deformação? Se sim,
use 2/sqrt(3) ao invés de 1')
M=1501; %input('Qual é o número de divisões do arco de contato?')
TOL=1e-4; %input('Qual é a tolerância para o raio corrigido/carga
recalculada?(ex.:0.01)')

```

Chamou-se de “Caso 2” o caso de laminação com os mesmos parâmetros do Caso 1 exceto a deformação acumulada (*eac*), tensão a ré (*Ti*) e coeficiente de atrito (*u*). Para o Caso 2:

```

eac=0; %input('Qual a deformação acumulada?')
Ti=30; %input('Qual é a tensão de tração na entrada? (MPa)')
u=0.0305; %input('Qual é o coeficiente de atrito?')

```

Optou-se por utilizar a curva de escoamento do material sob a forma:

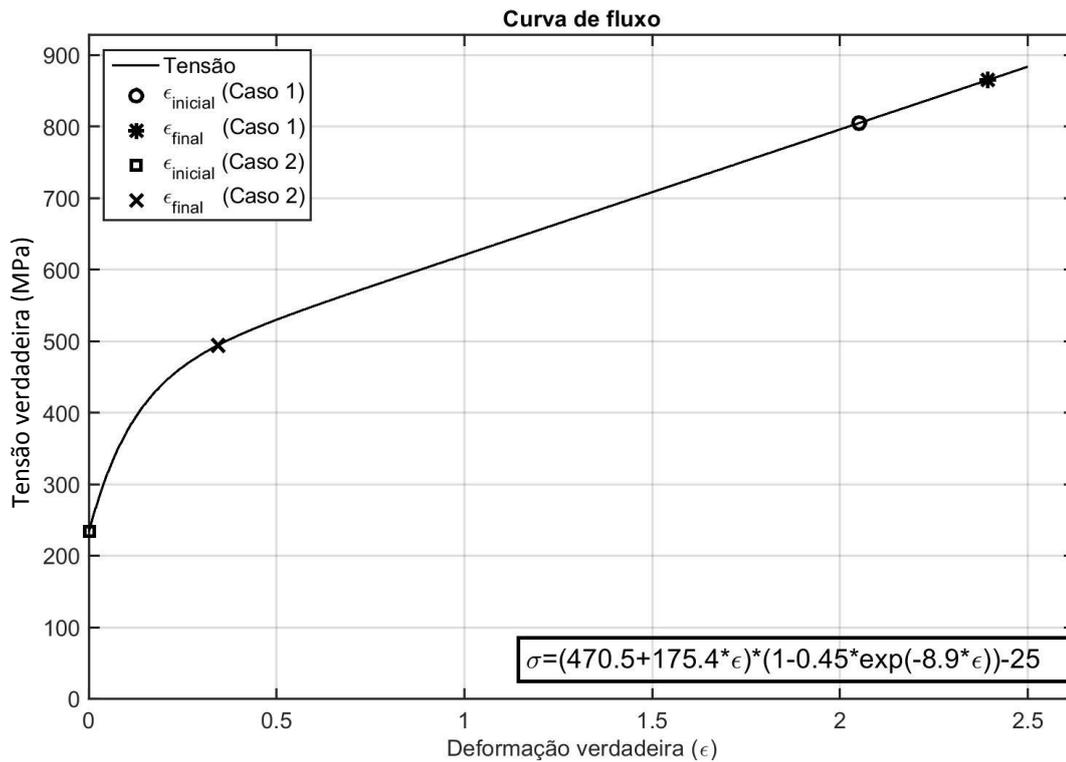
$$\sigma = (AA + BA * \varepsilon) * (1 - CA * \exp(-DA * \varepsilon)) - EA \quad (60)$$

Onde:

- $\sigma$ : tensão de escoamento
- $\varepsilon$ : deformação verdadeira
- AA, BA, CA, DA, EA são coeficientes do material.

Para os casos 1 e 2, a curva Tensão versus Deformação verdadeira do material em questão pode ser verificada na figura 11.

Figura 11 - Curva tensão X deformação verdadeira do material para os casos 1 e 2.



Fonte: Próprio autor.

## 4.2 Implementação do modelo de Bland e Ford

O programa de Bland e Ford é iniciado com a atribuição de valores para as variáveis constantes para determinado caso de laminação, como mostrado acima.

O próximo passo crucial é a verificação se a mordida é possível utilizando-se os parâmetros já atribuídos. De forma que a espessura de saída mínima deve ser igual a:

$$hf_{min} = h_i - 2 * R * (1 - \cos(\text{atan}(u)))$$

Caso a espessura mínima de saída para que ocorra a mordida para aquele determinado coeficiente de atrito seja maior que a espessura final definida, a nova espessura final será igual à espessura mínima de saída.

```
if hf < hfmin, hf = hfmin
display(sprintf('BF-Espessura final menor do que a espessura final
mínima, a nova espessura final será hf=%.4f.', hfmin))
end
```

Para todos os parâmetros utilizados na confecção deste trabalho, a espessura mínima de saída sempre foi menor do que a espessura final definida, portanto não houveram alterações na espessura final ao longo da execução do programa para nenhum caso, a não ser quando se variou propositalmente este parâmetro na definição da variável.

Uma outra condição de execução do programa Bland e Ford (BF) foi que as tensões a ré e a frente não podem ser maiores que a resistência ao escoamento do material da tira nas posições de entrada e saída. Se isso fosse verdade o material escoaria antes de ser laminado, sofrendo estrição e o aparecimento de defeitos. Caso as tensões a ré e a frente definidas fossem maiores que os limites de escoamento do material antes e após a laminação, as tensões a ré e a frente seriam definidas como igual ao próprio limite de escoamento naqueles pontos.

```

if Ti>Si, Ti=Si;
    display(sprintf('BF-Tensão a ré maior que resistência do material,
a nova tensão a ré será Ti=%.2f.',Si))
end
if Tf>Sf, Tf=Sf;
    display(sprintf('BF-Tensão a frente maior que resistência do
material, a nova tensão a frente será Tf=%.2f.',Sf))
end

```

Novamente, para nenhum caso executado foi necessário a mudança nos valores de tensão a ré ou a frente, a não ser quando se variou propositalmente estes parâmetros na definição das variáveis.

Em seguida calcula-se o ângulo neutro através das equações (25), (34) e (35). Se o resultado para o cálculo do ângulo neutro for menor que zero, significando que o ângulo neutro se encontra fora da zona de contato, o que é fisicamente impossível, o comprimento do arco de contato é definido como igual a 1, a carga/largura é definida como 1000, a distribuição de pressões ao longo do arco de contato é definida como zero e o programa é terminado.

```

if alfan<0
    display('BF-Ponto neutro está fora da região de contato.')
    arco=1;
    carga=1000;
    pr=zeros(1,M);
    angulo=zeros(1,M);
    return
end

```

Então, utilizando a regra de 1/3 de Simpson realiza-se a integração numérica das funções da pressão radial em função da coordenada angular representadas pelas equações (21), (31), (36) e (37). Para a equação (36) integra-se de zero até  $\alpha_N$  e para a equação (37) integra-se de  $\alpha_N$  até  $\alpha$ .

Calcula-se então a carga/largura de laminação utilizando-se a equação (39).

Ao final o raio do cilindro deformado é calculado utilizando-se a equação (8) de Hitchcock.

O programa continua recalculando o novo raio deformado até que a diferença percentual entre o raio deformado atual e o anterior seja menor que a tolerância ou que o número de iterações seja maior que 100.

```
if abs((Raux-RD)/RD) < TOL || IT>100
break
end
```

O programa é finalizado e retorna o valor da carga de laminação/largura, o comprimento do arco de contato utilizando-se o último raio deformado calculado (equação (1) sem aproximações) e a distribuição de pressões ao longo do arco de contato.

### 4.3 Implementação do modelo de Alexander

O programa de Alexander (AX) é iniciado com a atribuição de valores para as variáveis constantes para determinado caso de laminação. Assim como na programação de Bland e Ford é feito a mesma verificação para a espessura de saída mínima e para as tensões a ré e a frente.

Para o programa de Alexander também não houveram alterações na espessura final nem mudanças nos valores de tensão a ré ou a frente ao longo da execução do programa para nenhum caso, a não ser quando se variou propositalmente estes parâmetros na definição das variáveis.

Em seguida o programa calcula a distribuição de tensão de escoamento do material ao longo do arco de contato através da equação (7) e (60).

```
for i=1:M
    h=(hf+2*RD*(1-cos(PHI)));
    aux(i)=eac+PD*log(hi/h);
    S(i)=tensao_abdel(PD,AA,BA,aux(i),CA,DA,EA);
    PHI=PHI-DPHI;
end
```

$DPHI$  representa o incremento de ângulo que é calculado após encontrar-se o valor para o ângulo de contato  $\alpha$  e dividir-se pelo número  $M-1$  de intervalos de discretização. O ângulo  $\alpha$  é encontrado através da equação (1) e (2), sem fazer aproximações no cálculo de (1).

A função `tensao_abdel` retorna o valor de tensão calculado utilizando a equação (60).

```
function S=S(PD,AA,BA,d,CA,DA,EA)
S=PD*((AA+BA*d)*(1-CA*exp(-DA*d))-EA);
```

Calcula-se em seguida as condições de contorno para a distribuição de pressões ao longo do arco de contato utilizando-se as equações (51) ou (52) e (55).

```
pr(1)=(Si-Tei)/(1+u*tan(alfa));
```

```

if u*pr(1)>S(1)/2
    pr(1)=Si-Tei-(S(1)/2)*tan(alfa);
end
pr(M)=Sf-Tef;

```

Na primeira iteração, como primeira aproximação utiliza-se o valor de  $Tei$  e  $Tef$  como sendo iguais aos valores de  $Ti$  e  $Tf$  respectivamente.

Então através das condições de contorno calculadas anteriormente,  $pr(1)$  e  $pr(M)$ , uma rotina de Runge-Kutta de quarta ordem é utilizada para cálculo de todos os valores de  $pr(1)$  até  $pr(M)$ , vindo da entrada da chapa no laminador para a saída e posteriormente vindo da saída da chapa para a entrada. O método de Runge-Kutta é um método iterativo de resolução de problemas de valor inicial que determina o próximo valor de uma função  $pr(\phi_{n+1})$  baseado no atual valor de  $pr(\phi_n)$  somado com o produto do tamanho do intervalo ( $DPHI$ ) e uma inclinação estimada. A inclinação é uma média ponderada de inclinações:

- $k_1$  é a inclinação no início do intervalo;
- $k_2$  é a inclinação no ponto médio do intervalo, usando a inclinação  $k_1$  para determinar o valor de  $pr$  no ponto  $\phi_n + DPHI/2$  por meio do método de Euler;
- $k_3$  é novamente a inclinação no ponto médio do intervalo, mas agora usando a inclinação  $k_2$  para determinar o valor de  $pr$ ;
- $k_4$  é a inclinação no final do intervalo, com seu valor  $pr$  determinado usando  $k_3$ .

Ao fazer a média das quatro inclinações, um peso maior é dado para as inclinações no ponto médio. As equações do método adaptadas para o caso em análise são as mostradas abaixo:

$$pr(\phi_{n+1}) = pr(\phi_n) + \frac{DPHI}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = pr'(\phi_n, pr(\phi_n))$$

$$k_2 = pr'(\phi_n + \frac{1}{2}DPHI, pr(\phi_n) + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = pr'(\phi_n + \frac{1}{2}DPHI, pr(\phi_n) + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = pr'(\phi_n + DPHI, pr(\phi_n) + k_3)$$

Sendo que  $pr'$  é representado pelas equações (44) ou (47), dependendo da condição de agarramento ou deslizamento.

A ambiguidade de sinais positivos e negativos que define se quer calcular-se valores antes ou depois do ângulo neutro é resolvida com a implementação da variável  $Q$ .  $Q$  terá valor de +1 ou -1 quando anteceder os respectivos cálculos de valores na região de saída ou na região de entrada.

Na rotina Runge-Kutta também são implementadas as condições de agarramento ou deslizamento demonstrados nos itens 3.5.1 e 3.5.2 deste trabalho. Abaixo está disposto como foi implementado a rotina Runge-Kutta no programa.

```

%preenchimento dos valores de prEX (pressão vindo da saída para a
entrada)
prEX(M)=pr(M);
PHI=0;
Q=+1;
    for i=1:M1
        F=M+1-i;
        if ((u*prEX(F)) < (S(F))/2)
            F0=G1(PHI, RD, hf, u, Q) *prEX(F) +G2_AbdelKhalek(PHI, RD, hf, u, Q, hi, e
            ac, AA, BA, CA, DA, EA, PD);
            A=G1((PHI+0.5*Q*DPHI), RD, hf, u, Q);
            C=G2_AbdelKalek((PHI+0.5*Q*DPHI), RD, hf, u, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA,
            EA, PD);
            F1=A*(prEX(F)+0.5*Q*DPHI*F0)+C;
            F2=A*(prEX(F)+0.5*Q*DPHI*F1)+C;
            F3=G1((PHI+Q*DPHI), RD, hf, u, Q) * (prEX(F)+Q*DPHI*F2) +G2_AbdelKhal
            ek((PHI+Q*DPHI), RD, hf, u, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA, EA, PD);
            DS=DPHI*(F0+2*(F1+F2)+F3)*Q/6;
        else
            F0=G4()*prEX(F)+G3_AbdelKalek(PHI, RD, hf, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA, E
            A, PD);
            A=G4();
            C=G3_AbdelKalek((PHI+0.5*Q*DPHI), RD, hf, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA, EA
            , PD);
            F1=A*(prEX(F)+0.5*Q*DPHI*F0)+C;
            F2=A*(prEX(F)+0.5*Q*DPHI*F1)+C;
            F3=G4()* (prEX(F)+Q*DPHI*F2) +G3_AbdelKalek((PHI+Q*DPHI), RD, hf, Q
            , hi, eac, AA, BA, CA, DA, EA, PD);
            DS=DPHI*(F0+2*(F1+F2)+F3)*Q/6;
        end
        prEX(F-1)=prEX(F)+DS;
        PHI=PHI+DPHI;
    end
%preenchimento dos valores de prEN (pressão vindo da entrada para a
saída)
prEN(1)=pr(1);
PHI=alfa;

```

```

Q=-1;
for f=1:M1
    if ((u*prEN(f)) < (S(f))/2)
        F0=G1(PHI, RD, hf, u, Q)*prEN(f)+G2_AbdelKhalek(PHI, RD, hf, u, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA, EA, PD);
        A=G1((PHI+0.5*Q*DPHI), RD, hf, u, Q);
        C=G2_AbdelKhalek((PHI+0.5*Q*DPHI), RD, hf, u, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA, EA, PD);
        F1=A*(prEN(f)+0.5*Q*DPHI*F0)+C;
        F2=A*(prEN(f)+0.5*Q*DPHI*F1)+C;
        F3=G1((PHI+Q*DPHI), RD, hf, u, Q)*(prEN(f)+Q*DPHI*F2)+G2_AbdelKhalek((PHI+Q*DPHI), RD, hf, u, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA, EA, PD);
        DS=DPHI*(F0+2*(F1+F2)+F3)*Q/6;
    else
        F0=G4()*prEN(f)+G3_AbdelKhalek(PHI, RD, hf, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA, EA, PD);
        A=G4();
        C=G3_AbdelKhalek((PHI+0.5*Q*DPHI), RD, hf, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA, EA, PD);
        F1=A*(prEN(f)+0.5*Q*DPHI*F0)+C;
        F2=A*(prEN(f)+0.5*Q*DPHI*F1)+C;
        F3=G4()*(prEN(f)+Q*DPHI*F2)+G3_AbdelKhalek((PHI+Q*DPHI), RD, hf, Q, hi, eac, AA, BA, CA, DA, EA, PD);
        DS=DPHI*(F0+2*(F1+F2)+F3)*Q/6;
    end
    prEN(f+1)=prEN(f)+DS;
    PHI=PHI-DPHI;
end

```

As funções  $G1$ ,  $G2\_AbdelKhalek$ ,  $G3\_AbdelKhalek$  são as equações (45), (46) e (48) respectivamente. A função  $G4$  retorna o valor zero.  $PHI$  é a coordenada angular.

Em seguida a função  $pr$  (pressão radial) é preenchida com o menor valor entre as funções  $prEX$  e  $prEN$ .

```

for i=1:M
    if prEX(i) <= prEN(i);
        pr(i)=prEX(i);
    end
    if prEN(i) <= prEX(i);
        pr(i)=prEN(i);
    end
end

```

Então calcula-se o ângulo neutro (*alfan*) através das passagens abaixo:

```
X=-2;
for i=1:M1
    if prEX(i)>=prEN(i) ee prEN(i+1)>=prEX(i+1);
        X=DPHI/(1+(prEX(i)-prEN(i))/(prEN(i+1)-prEX(i+1)));
        t=i;
    end
```

O valor da variável *X* é definido como sendo negativo, e caso *X* não se torne positivo após o conjunto de códigos acima, isto significa que não pôde ser encontrado um ângulo neutro válido, significando que o ângulo neutro se encontra fora da zona de contato, o que é fisicamente impossível, então o comprimento do arco de contato é definido como igual a 1, a carga/largura é definida como 1000, a distribuição de pressões ao longo do arco de contato é definida como zero e o programa é terminado.

```
if i==M1 ee X<0
    display('AX-Ponto neutro está fora da região de contato.')
    arco=1;
    carga=1000;
    pr=zeros(1,M);
    angulo=zeros(1,M);
    return
end
Xt1=t+1;
alfan=(XM-Xt1)*DPHI+X;
Y=(prEN(t+1)-prEN(t))*(1-X/DPHI);
prN=prEN(t)+Y;
IN=t;
```

Calcula-se então a tensão de cisalhamento (*tau*) para cada valor discreto de *PHI*. Como pode ser verificado na figura 10, Alexander projeta a pressão de laminação e a tensão de cisalhamento na direção da metade do ângulo de contato, a variável *ARG* é justamente o valor da distância angular entre a direção do vetor carga e metade do ângulo de contato.

```
PHI=alfa;
for i=1:M
    ARG=PHI-0.5*alfa;
    XS=sin(ARG);
    XC=cos(ARG);
    prCOS(i)=pr(i)*XC;
    if (u*pr(i)<S(i)/2)
        tau(i)=u*pr(i);
    else
```

```

        tau(i)=S(i)/2;
    end
    tauSIN(i)=tau(i)*XS;
    PHI=PHI-DPHI;
end

```

É realizada a integração da função  $\tau SIN$  de zero até  $\alpha_N$  e de  $\alpha_N$  até  $\alpha$  utilizando-se a regra do trapézio. Este resultado representa a contribuição da tensão de cisalhamento no valor calculado final da carga/largura de laminação:

```

sum=0;
for i=2:IN-1
    sum=sum+tauSIN(i);
end
sumEN=(DPHI/2)*(tauSIN(2-1)+2*sum+tauSIN(IN-1+1));
areaEN=sumEN+daEN;
sum=0;
for i=IN+2:M-1
    sum=sum+tauSIN(i);
end
sumEX=(DPHI/2)*(tauSIN(IN+2-1)+2*sum+tauSIN(M-1+1));
areaEX=sumEX+daEX;

```

Então, utilizando a regra de 1/3 de Simpson composta realiza-se a integração numérica da função pressão radial  $pr$  em função da coordenada angular  $\theta$  até  $\alpha$ .

```

IMPAR=0;
PAR=0;
for i=2:2:M-3
    PAR=PAR+prCOS(i);
    IMPAR=IMPAR+prCOS(i+1);
end
sumprCOS=(DPHI/3)*(prCOS(2-1)+4*(PAR+prCOS(M-3+2))+2*IMPAR+prCOS(M-3+3));

```

Calcula-se então a carga/largura de laminação utilizando-se a equação (58).

Começa então a etapa de cálculo da contribuição para a carga de laminação da zona elástica de compressão e do retorno elástico sofrido pela chapa. Esses cálculos são realizados utilizando-se as equações (53), (54), (56) e (57). Como primeira estimativa de  $t_{ei}$  e  $t_{ef}$  são utilizados os próprios valores de  $T_i$  e  $T_f$  respectivamente. Em seguida os valores são calculados iterativamente até alcançarem a tolerância ou precisarem de mais de 100 iterações para convergir.

```

Peii=(1-vtira^2)*hi*((Si-Ti)^2)*sqrt(RD/(hi-hf))/(4*Etira);
IT1=0;
    while 1
        tei=Ti-2*u*Peii/hi;
        Pei=(1-vtira^2)*hi*((Si-tei)^2)*sqrt(RD/(hi-hf))/(4*Etira);
        if abs(Pei-Peii)/Pei<TOL || IT1>100
            break;
        else
            Peii=Pei;
            IT1=IT1+1;
        end
    end
A1=(2/3)*sqrt(RD*hf*(1-vtira^2)/Etira);
Pefi=A1*(Sf-Tf)^1.5;
IT2=0;
    while 1
        tef=Tf-2*u*Pefi/hf;
        Pef=A1*(Sf-tef)^1.5;
        if abs((Pef-Pefi)/Pef)<TOL || IT2>100
            break;
        else
            Pefi=Pef;
            IT2=IT2+1;
        end
    end
end

```

Soma-se então as contribuições das zonas elásticas à carga/largura já calculada da seguinte maneira (equação 59):

$$P=P+Pei+Pef;$$

Ao final o raio do cilindro deformado é calculado utilizando-se as equações de (11) a (16) que representam o raio deformado de Hitchcock corrigido por Ford.

```

c=16*(1-vcilindro^2)/(pi*Ecilindro);
deltaT=vtira*(1+vtira)*(hf*Tf-hi*Ti)/Etira;
deltaE=(1-vtira^2)*(Sf-tef)*hf/Etira;
A2=c/(sqrt((hi-hf)+deltaE+deltaT)+sqrt(deltaE))^2;
RD=R*(1+A2*P);

```

O programa continua recalculando uma nova carga total/largura até que a diferença percentual entre a carga total/largura atual e a anterior seja menor que a tolerância ou que o número de iterações seja maior que 100.

```

if abs((P-P1)/P1)<TOL || IT>100
    break;

```

```
else
    P1=P;
    IT=IT+1;
end
```

O programa é finalizado e retorna o valor da carga total de laminação/largura, o comprimento do arco de contato utilizando-se o último raio deformado calculado (equação (1) sem aproximações) e a distribuição de pressões ao longo do arco de contato.

#### 4.4 Programa auxiliar

A partir dos programas desenvolvidos para o cálculo de carga/largura, distribuição de pressões e comprimento do arco de contato utilizando ambos os modelos de Bland e Ford e Alexander, foi escrito um programa auxiliar que verifica a influência da variação de alguns parâmetros de laminação nos resultados encontrados.

Considerando-se o Caso 1 e 2 de laminação, o programa auxiliar foi utilizado para testar a variação dos seguintes parâmetros e as suas influências nos resultados:

- Coeficiente de atrito;
- Raio do cilindro de laminação;
- Espessura inicial de laminação;
- Tensão a ré;
- Tensão a frente;

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1 Tempo de processamento

Utilizando-se os dados de laminação para o Caso 1 e 2 e os mesmos critérios de convergência, a tabela 1 a seguir representa o tempo médio de processamento gasto para a execução dos programas de Bland e Ford (BF) e Alexander (AX) uma única vez.

**Tabela 1 - Tempo típico de execução dos programas de cálculo de carga para os Casos 1 e 2.**

Tempo médio (s)		
Programa	Caso 1	Caso 2
Bland e Ford	0.451	0.323
Alexander	0.905	0.730

Fonte: Próprio autor.

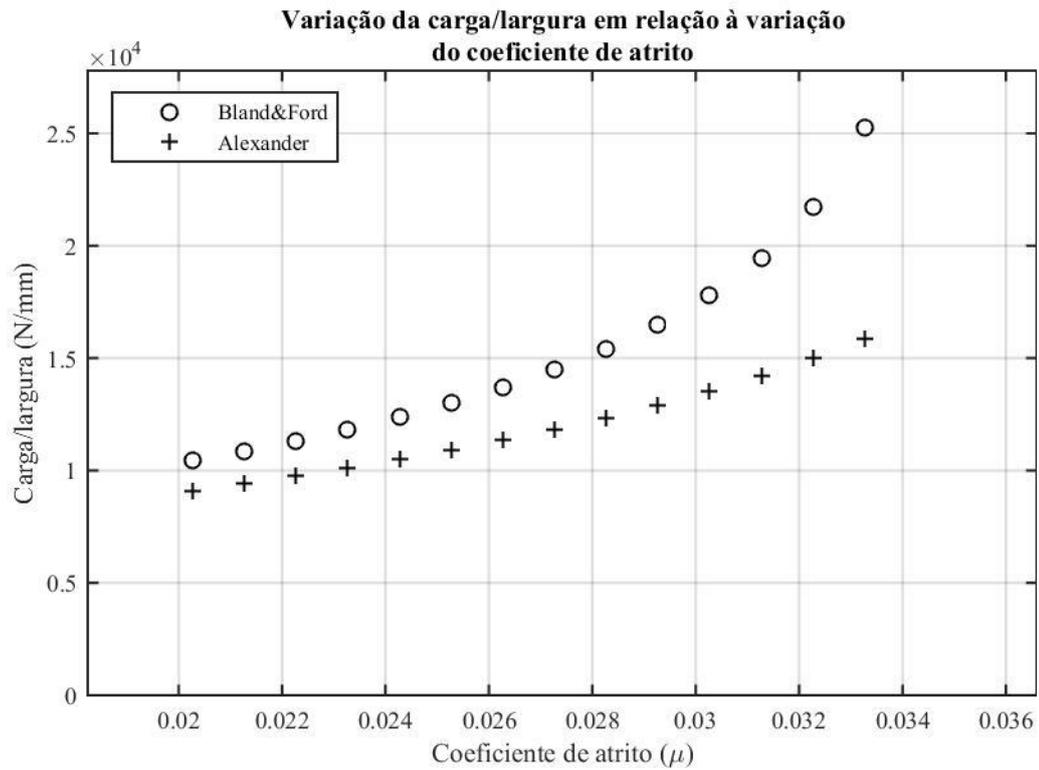
Obviamente devido à maior complexidade do modelo de Alexander, onde mais cálculos são efetuados, mais de um processo iterativo é necessário (devido ao cálculo das contribuições das zonas elásticas de deformação da chapa), o seu tempo de execução é em média 45~55% maior do que o tempo para a execução do modelo de Bland e Ford, dependendo dos parâmetros de laminação utilizados.

### 5.2 Efeito da variação do coeficiente de atrito

Baseando-se nos Casos 1 e 2, utilizou-se o programa auxiliar para testar a influência da variação do coeficiente de atrito na carga de laminação/largura, distribuição de pressões ao longo do arco de contato e no tamanho do arco de contato utilizando-se o último raio deformado para o cálculo.

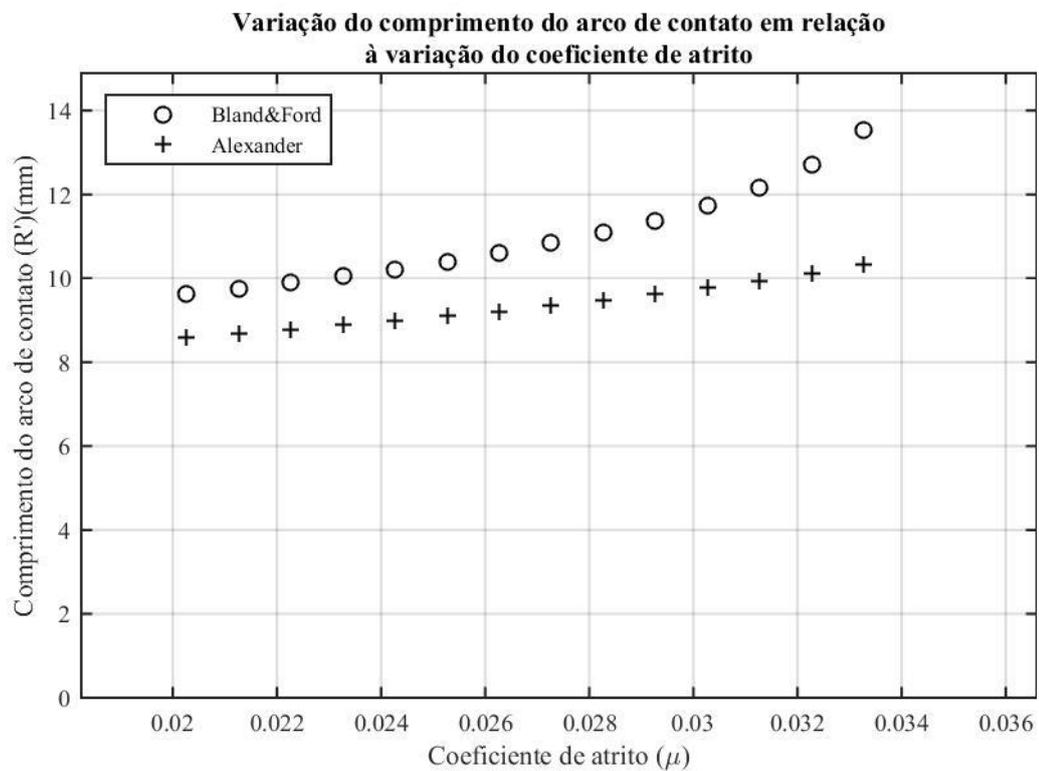
Para o Caso 1 o coeficiente de atrito variou de 0.0203 até 0.0333 com um incremento de 0.001. É importante frisar que os intervalos de teste, tanto para o Caso 1 como Caso 2, foram definidos por meio de testes anteriores onde verificou-se que fora deste intervalo os programas encontravam dificuldades de convergência. Nas figuras 12, 13, 14 e 15 são mostrados os resultados encontrados para o Caso 1.

Figura 12 - Efeito da variação do coeficiente de atrito na carga de laminação (Caso 1).



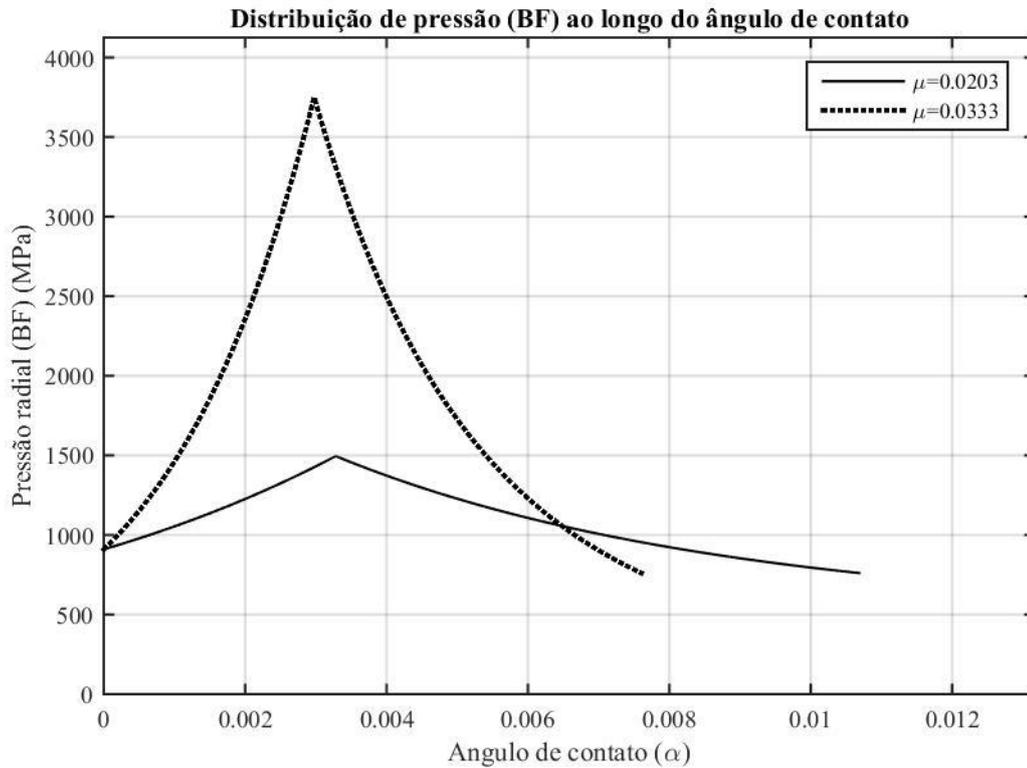
Fonte: Próprio autor.

Figura 13 - Efeito da variação do coeficiente de atrito no comprimento do arco de contato (Caso 1).



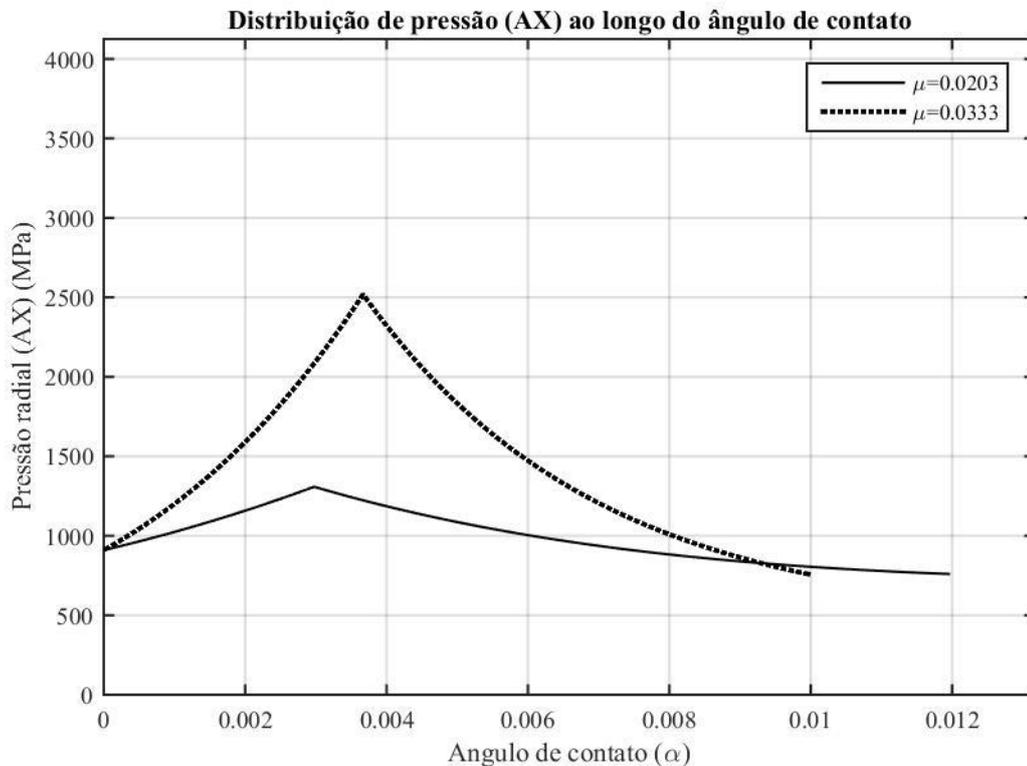
Fonte: Próprio autor.

**Figura 14 - Efeito da variação do atrito na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford.**



Fonte: Próprio autor.

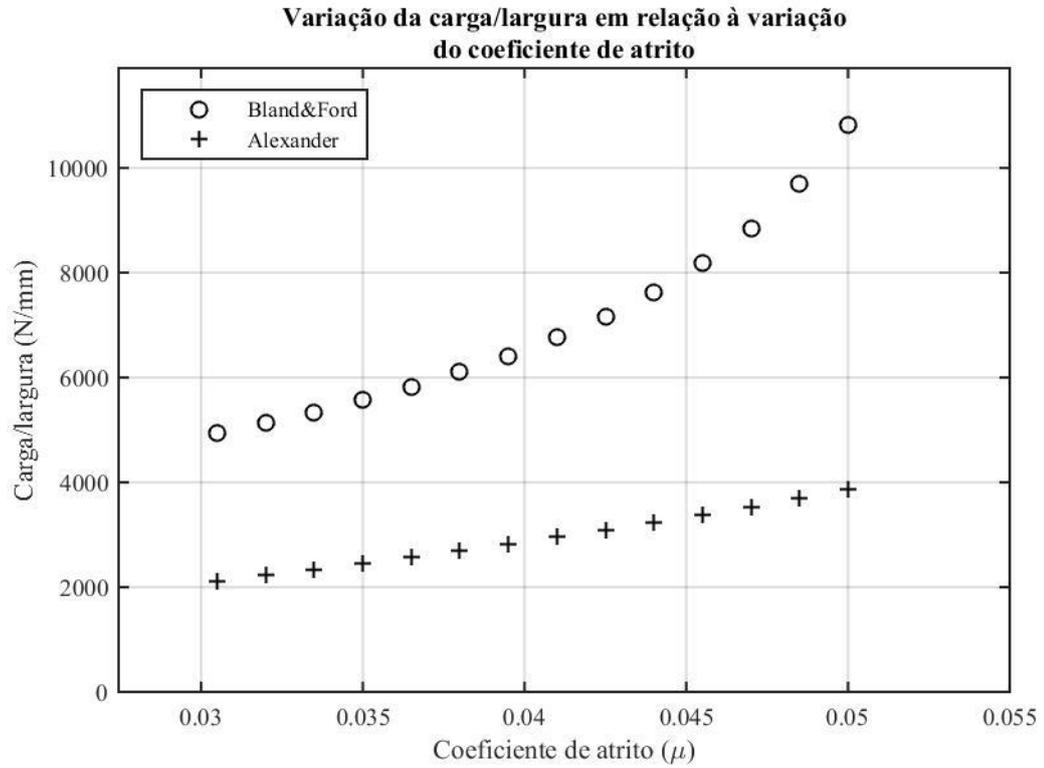
**Figura 15 - Efeito da variação do atrito na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

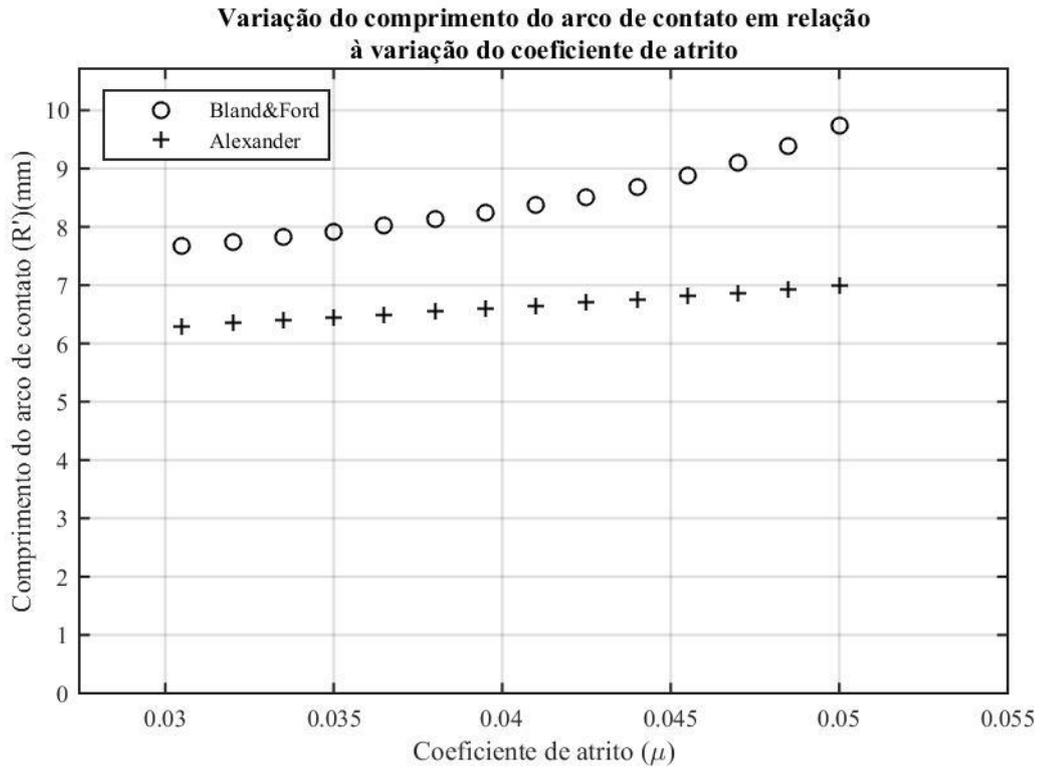
Para o Caso 2 o coeficiente de atrito variou de 0.0305 até 0.0500 com um incremento de 0.0015. Nas figuras 16, 17, 18 e 19 são mostrados os resultados encontrados para o Caso 2.

**Figura 16 - Efeito da variação do coeficiente de atrito na carga de laminação (Caso 2).**



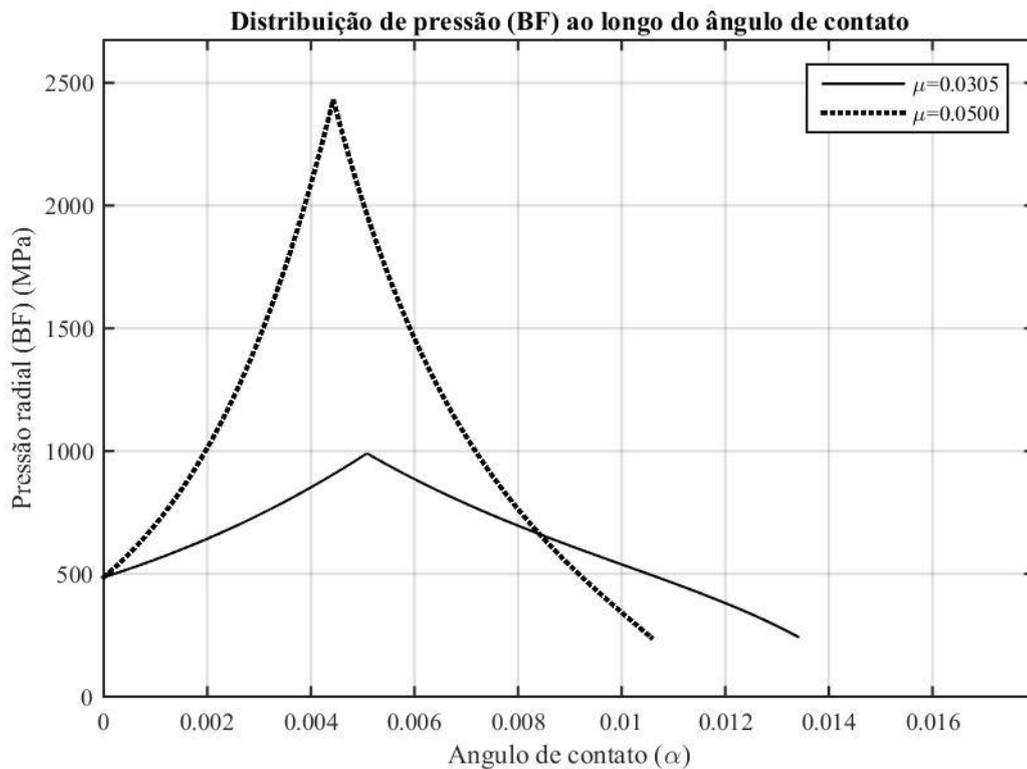
Fonte: Próprio autor.

Figura 17 - Efeito da variação do coeficiente de atrito no comprimento do arco de contato (Caso 2).



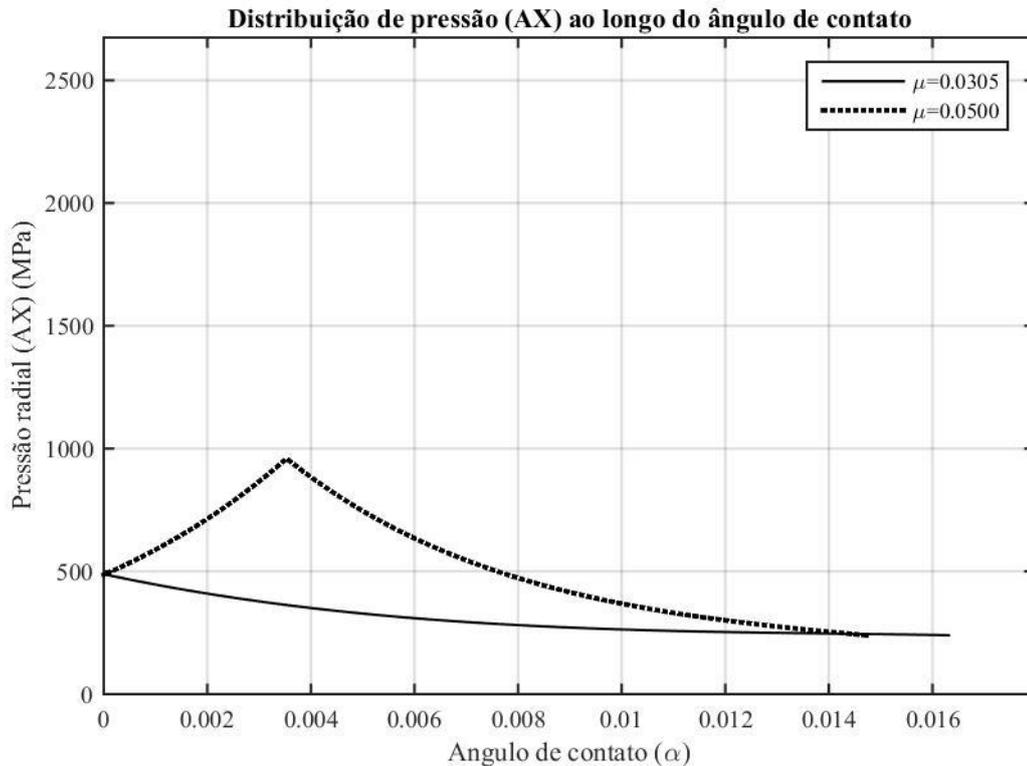
Fonte: Próprio autor.

Figura 18 - Efeito da variação do atrito na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford.



Fonte: Próprio autor.

**Figura 19 - Efeito da variação do atrito na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

Pode perceber-se pelas figuras 12 e 16 que quanto maior o coeficiente de atrito maior é a carga de laminação calculada por ambos os modelos. O modelo de Bland e Ford, para todos os resultados calculados, sempre apresentou maiores valores de carga/largura que o modelo de Alexander.

Pelos gráficos das figuras 13 e 17 verifica-se que o comprimento do arco de contato calculado com o último raio deformado também aumenta com o aumento do coeficiente de atrito.

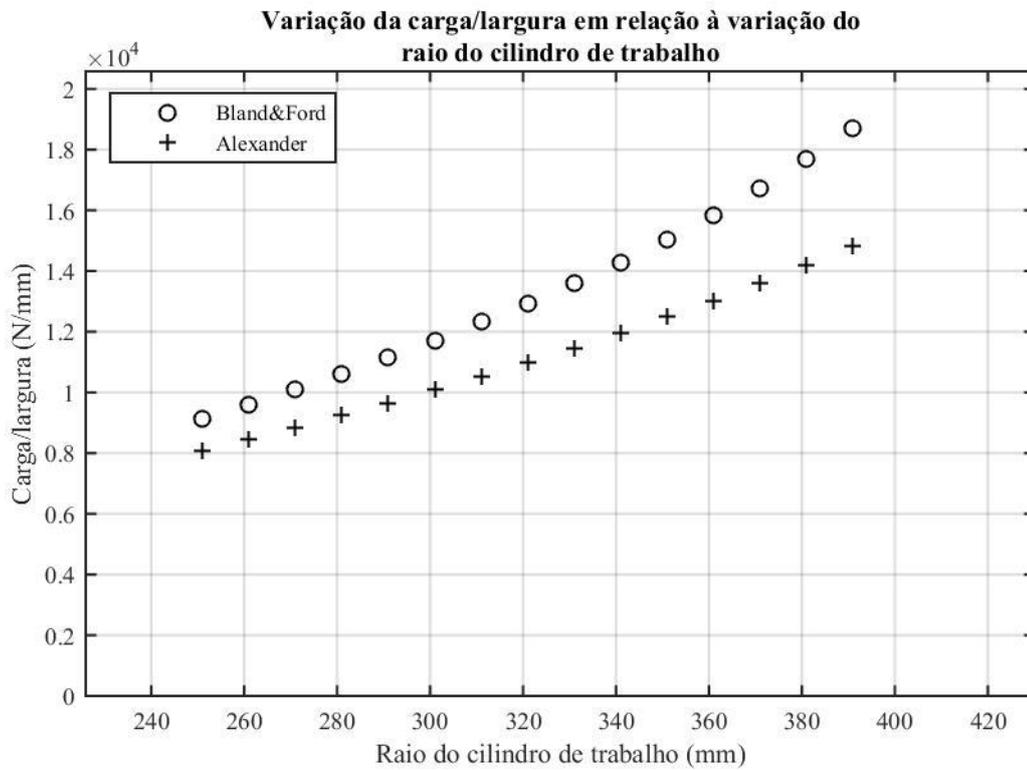
Nas figuras 14 e 18 é mostrado um resultado interessante, o aumento do coeficiente de atrito causa uma diminuição do ângulo de contato (pois leva ao aumento do raio deformado  $R'$ ), mas desloca pouco o ângulo neutro (representado pelo valor da abscissa onde ocorre o pico de pressão). Já nas figuras 15 e 19, o aumento do coeficiente de atrito além de diminuir o ângulo de contato causa um deslocamento maior do ângulo neutro para mais próximo da saída. O deslocamento maior do ângulo neutro pode ser explicado pelo fato de o modelo de Alexander levar em consideração a tensão de cisalhamento na superfície causada pela diferença de velocidade entre a chapa e o cilindro sem utilizar nenhuma aproximação. É importante notar que a força tangencial de cisalhamento aumenta gradativamente com o aumento da carga e

consequente aumento do achatamento dos cilindros. Em geral o aumento é pequeno, mas o impacto é potencializado com maiores reduções (CHEN et al., 2014).

### 5.3 Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho

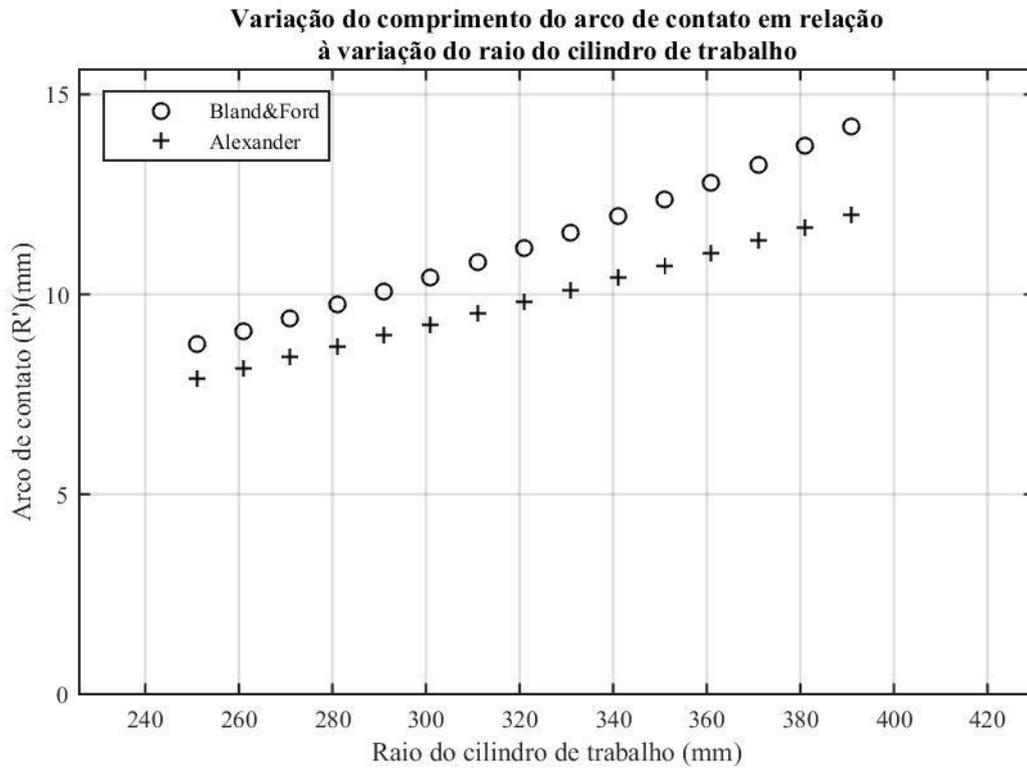
Para o Caso 1 o raio foi variado de 251 a 391 mm com um incremento de 10 mm. É importante frisar que este intervalo foi definido por meio de testes anteriores onde verificou-se que fora deste intervalo os programas encontravam dificuldades de convergência. Nas figuras 20, 21, 22 e 23 são mostrados os resultados encontrados para o Caso 1.

**Figura 20 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na carga de laminação (Caso 1).**



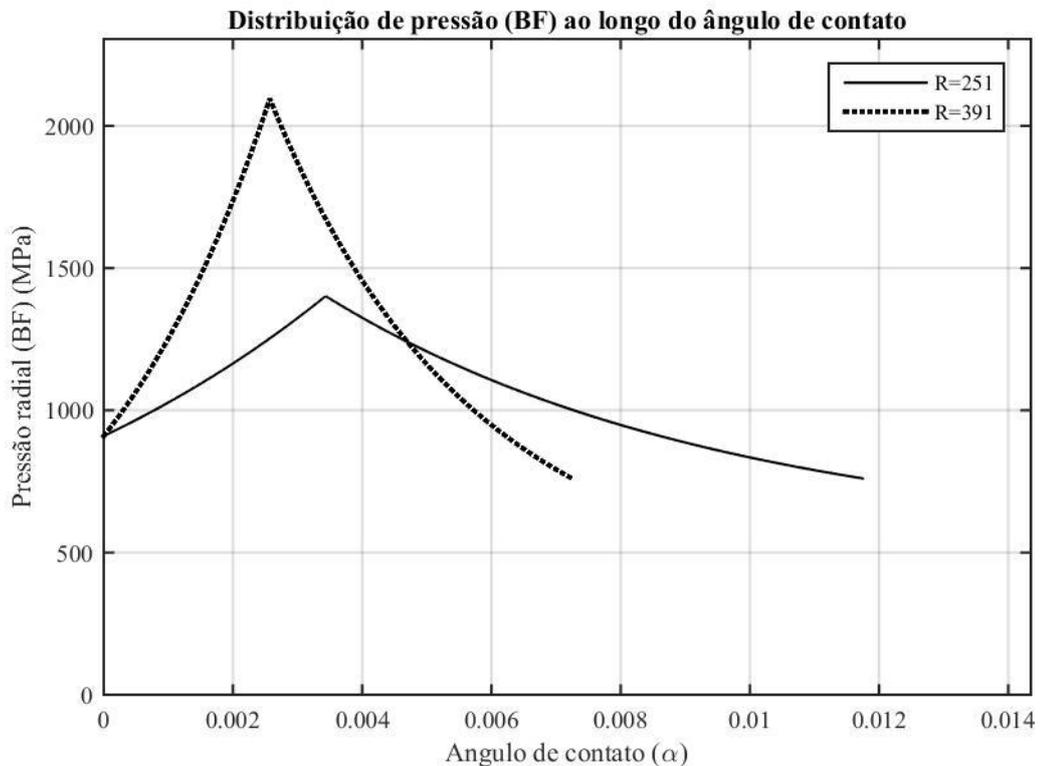
Fonte: Próprio autor.

**Figura 21 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho no comprimento do arco de contato (Caso 1).**



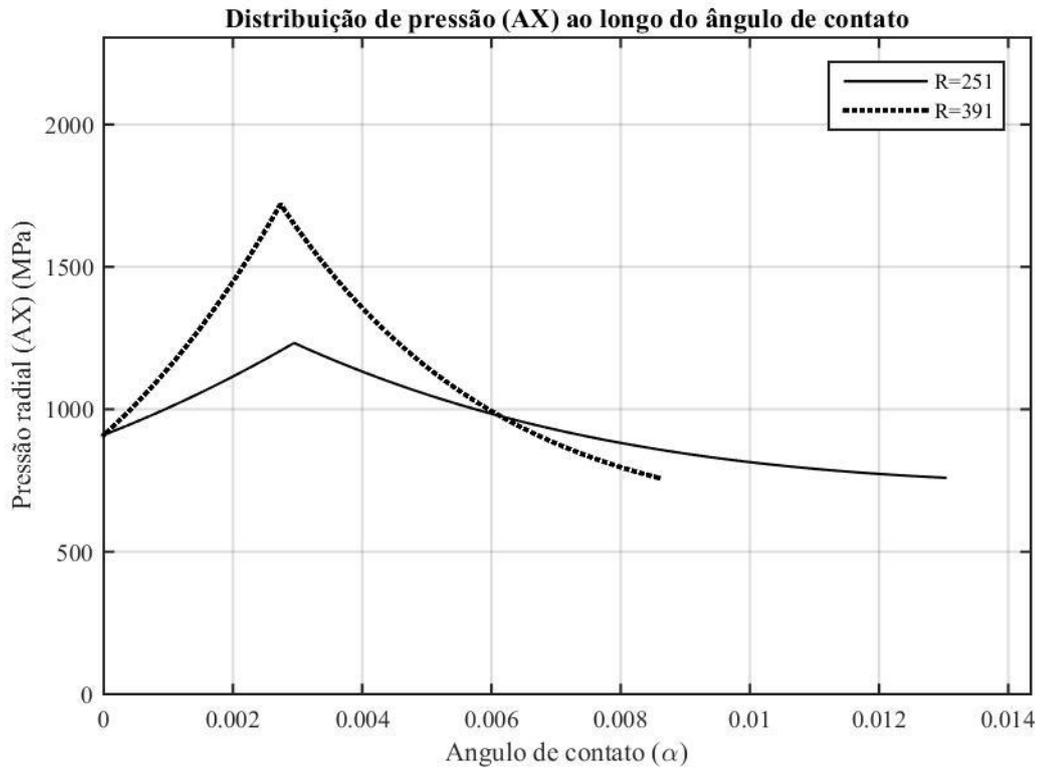
Fonte: Próprio autor.

**Figura 22 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford.**



Fonte: Próprio autor.

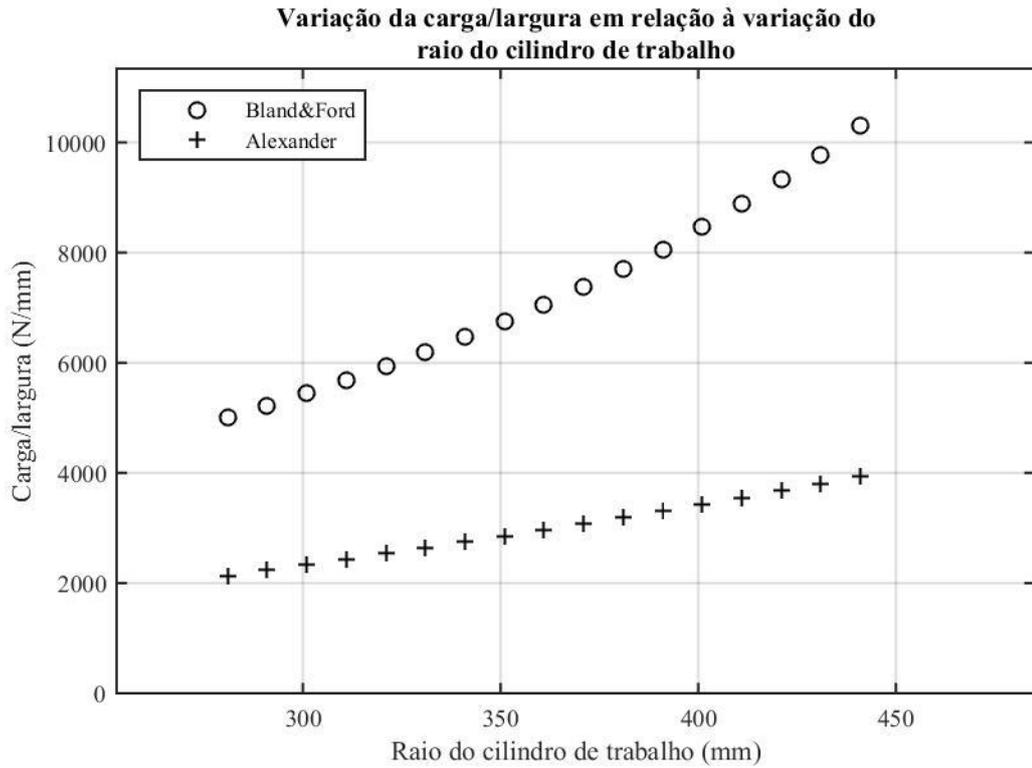
**Figura 23 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

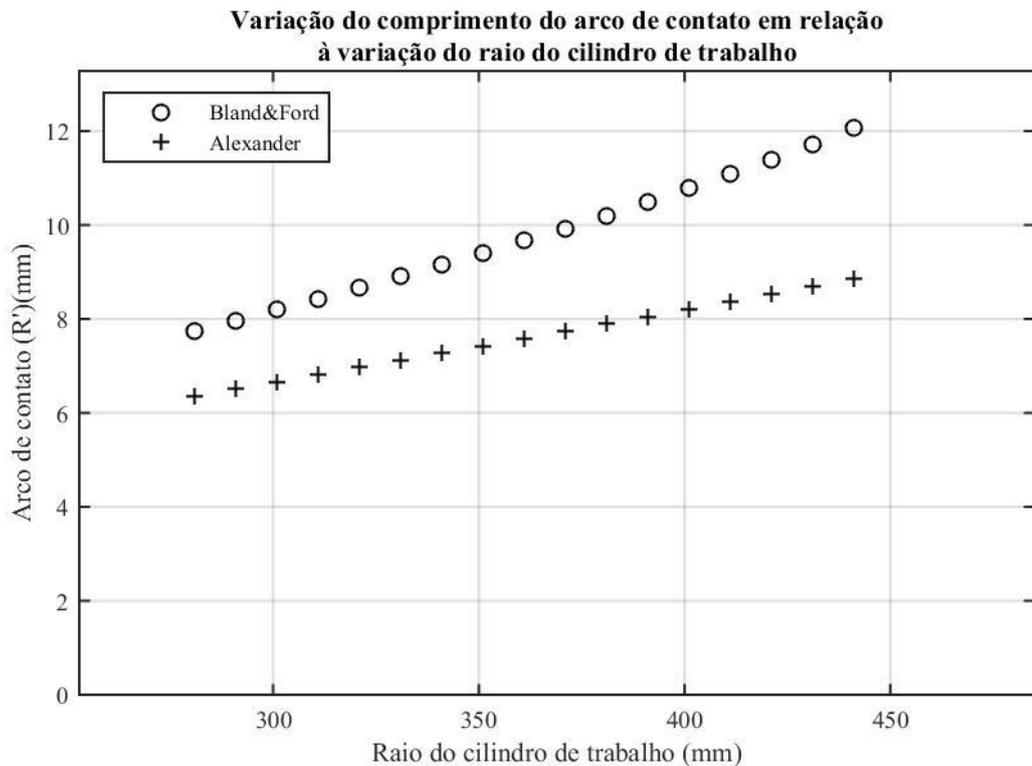
Para o Caso 2 o raio foi variado de 281 a 441 mm com um incremento de 10 mm. Nas figuras 24, 25, 26 e 27 são mostrados os resultados encontrados para o Caso 2.

Figura 24 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na carga de laminação (Caso 2).



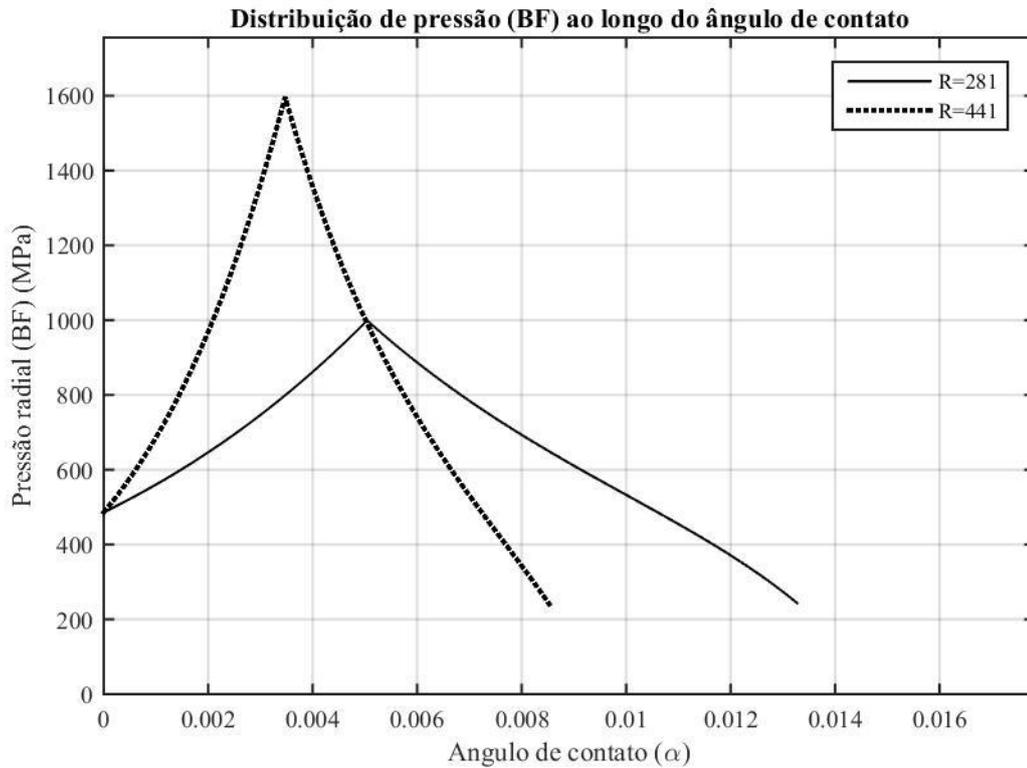
Fonte: Próprio autor.

Figura 25 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho no comprimento do arco de contato (Caso 2).



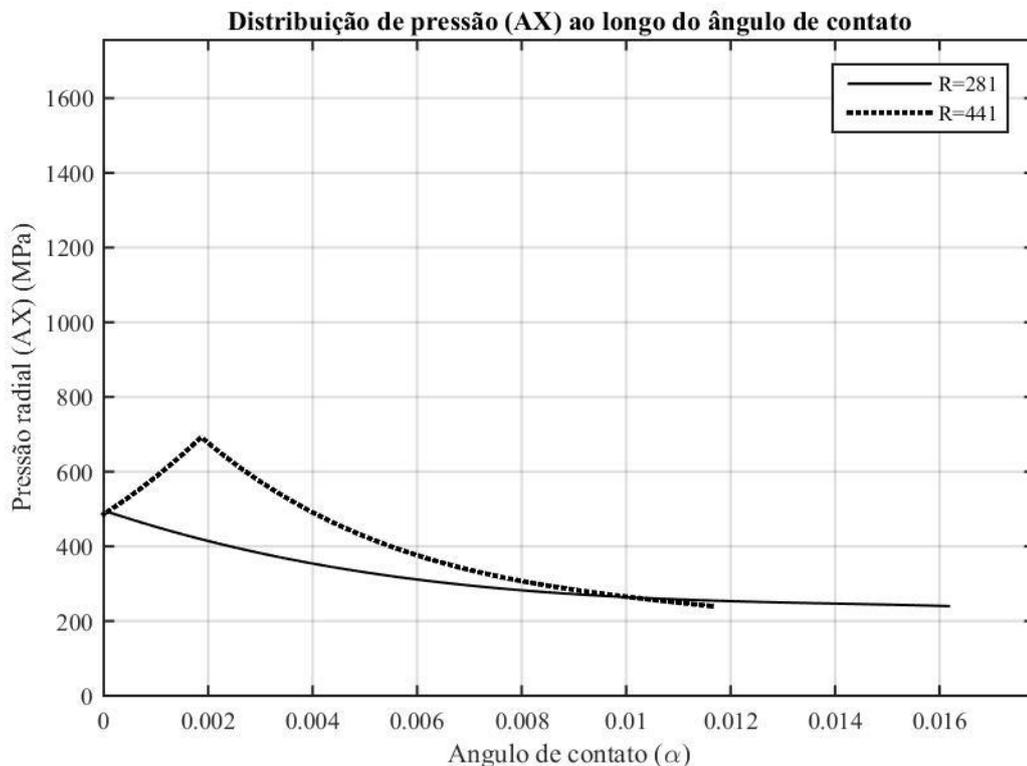
Fonte: Próprio autor.

**Figura 26 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford.**



Fonte: Próprio autor.

**Figura 27 - Efeito da variação do raio do cilindro de trabalho na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

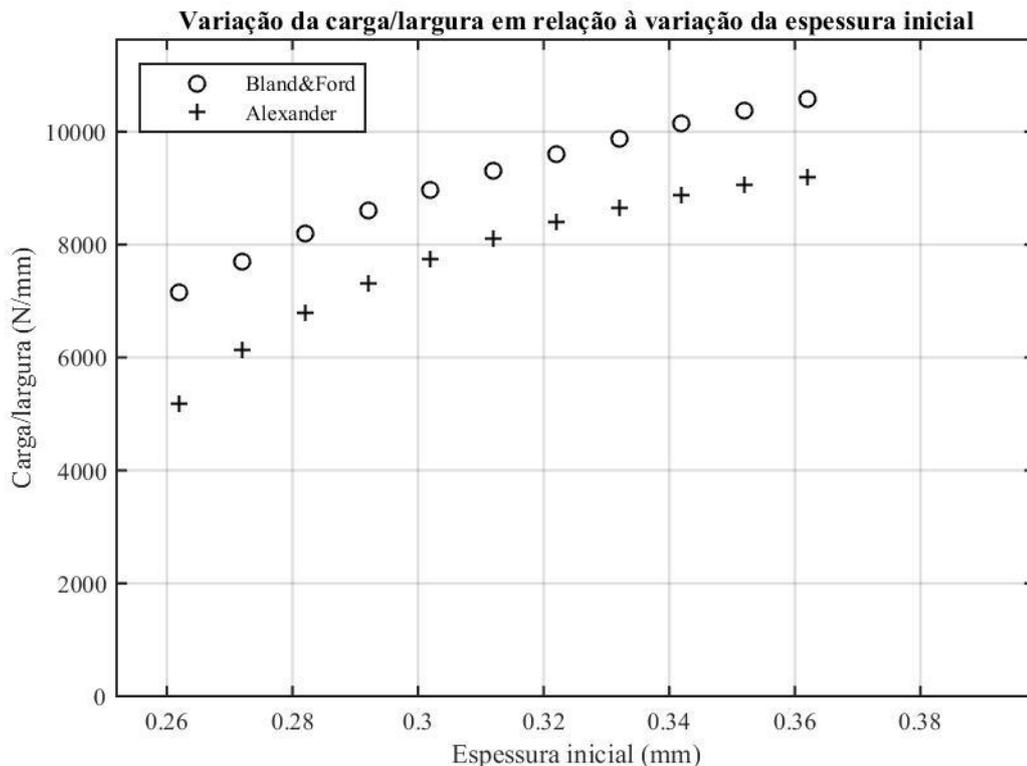
Analisando-se os gráficos das figuras 20, 21, 24 e 25 o aumento do raio do cilindro de laminação leva a um aumento da carga de laminação e do comprimento do arco de contato (calculado usando  $R'$ ).

O aumento do raio também diminui o ângulo de contato, o que pode ser verificado tanto nas figuras 22 e 23 quanto nas figuras 26 e 27. Para os dois modelos, o aumento do raio causa um deslocamento do ângulo neutro para mais próximo da saída.

#### 5.4 Efeito da variação da espessura inicial

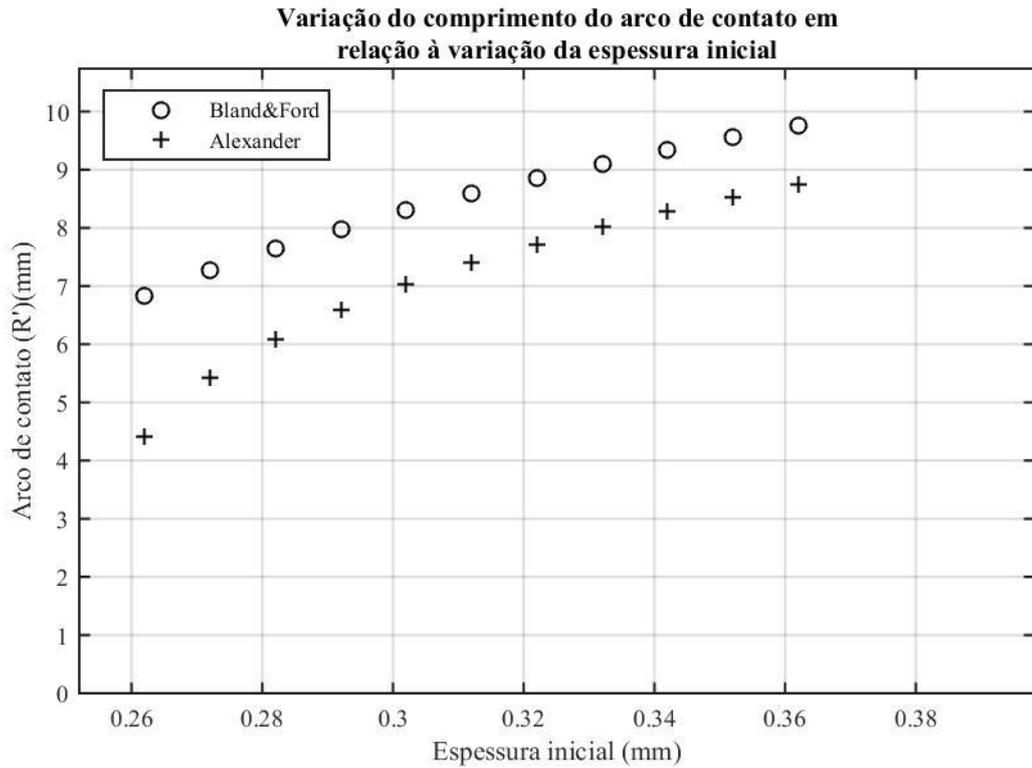
Nesta análise, ao variar-se a espessura inicial de entrada da chapa no laminador buscou-se ter uma ideia de como a variação da redução aplicada pode alterar os resultados obtidos. A espessura inicial variou de 0.262 a 0.362 mm com um incremento de 0.01 mm, mantendo-se constante todos os outros parâmetros para o Caso 1. Nas figuras 28, 29, 30 e 31 são mostrados os resultados encontrados para o Caso 1.

**Figura 28 - Efeito da variação da espessura inicial na carga de laminação (Caso 1).**



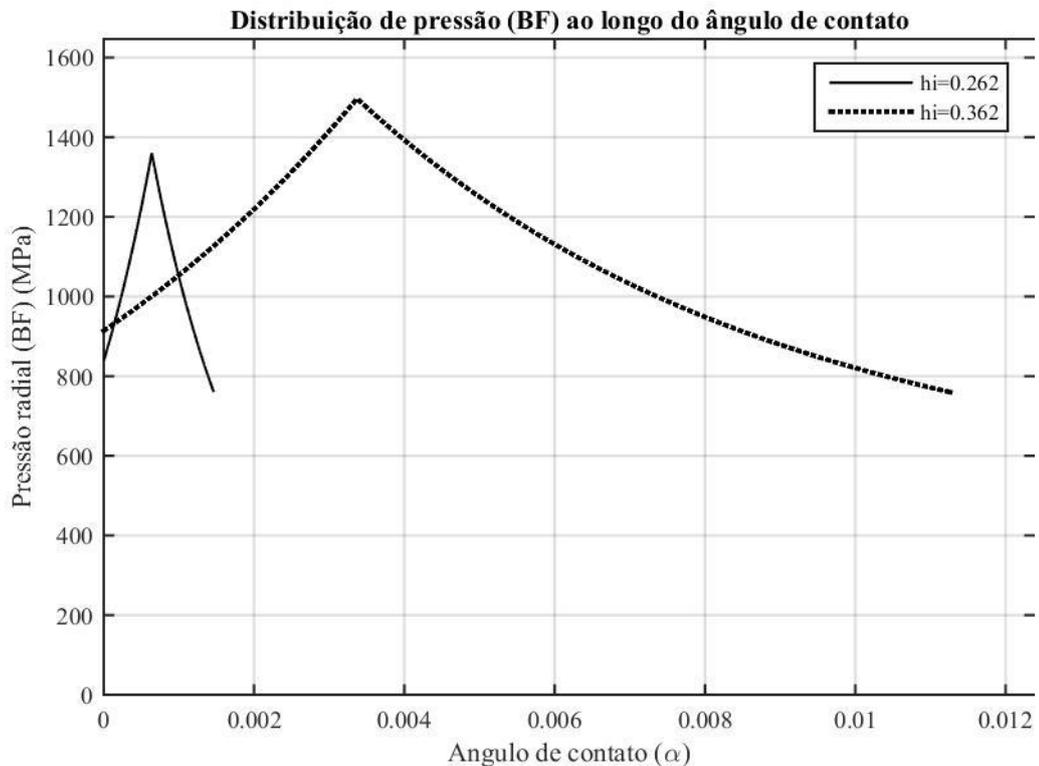
Fonte: Próprio autor.

Figura 29 - Efeito da variação da espessura inicial no comprimento do arco de contato (Caso 1).



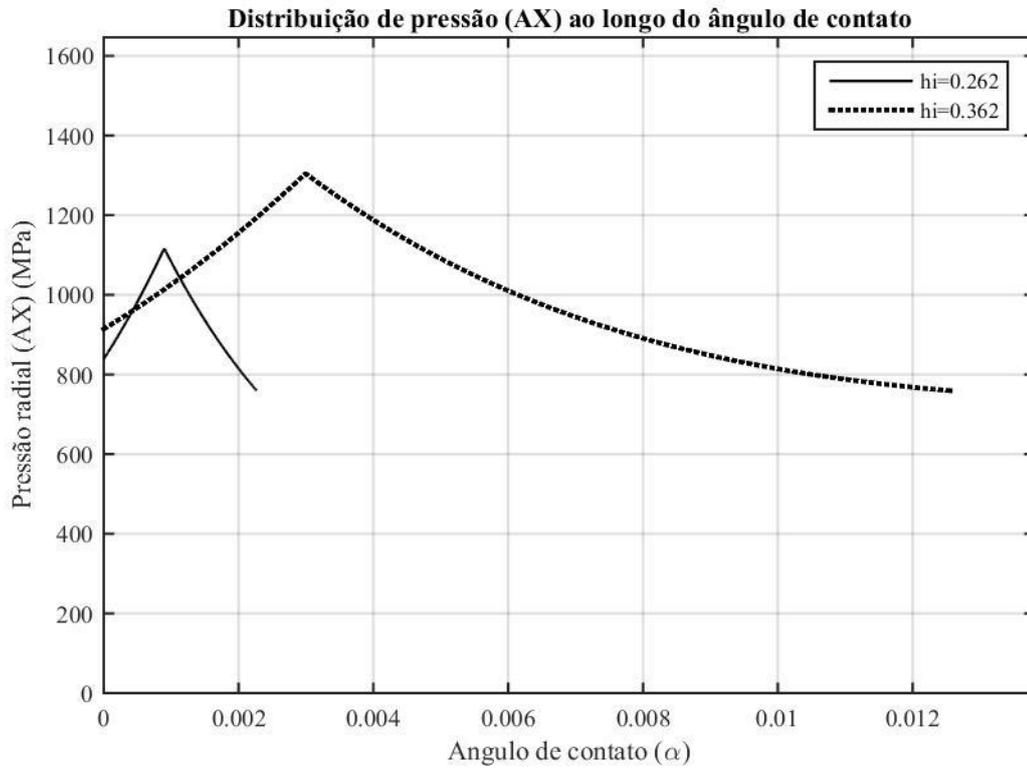
Fonte: Próprio autor.

Figura 30 - Efeito da variação da espessura inicial na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford.



Fonte: Próprio autor.

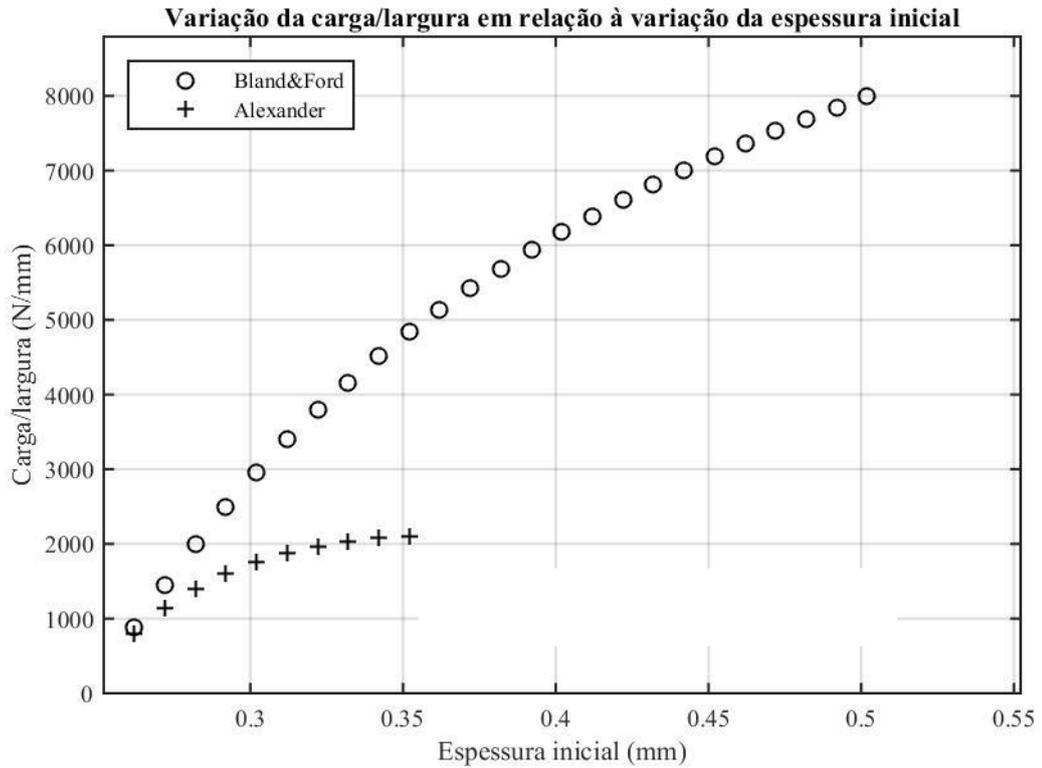
**Figura 31 - Efeito da variação da espessura inicial na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

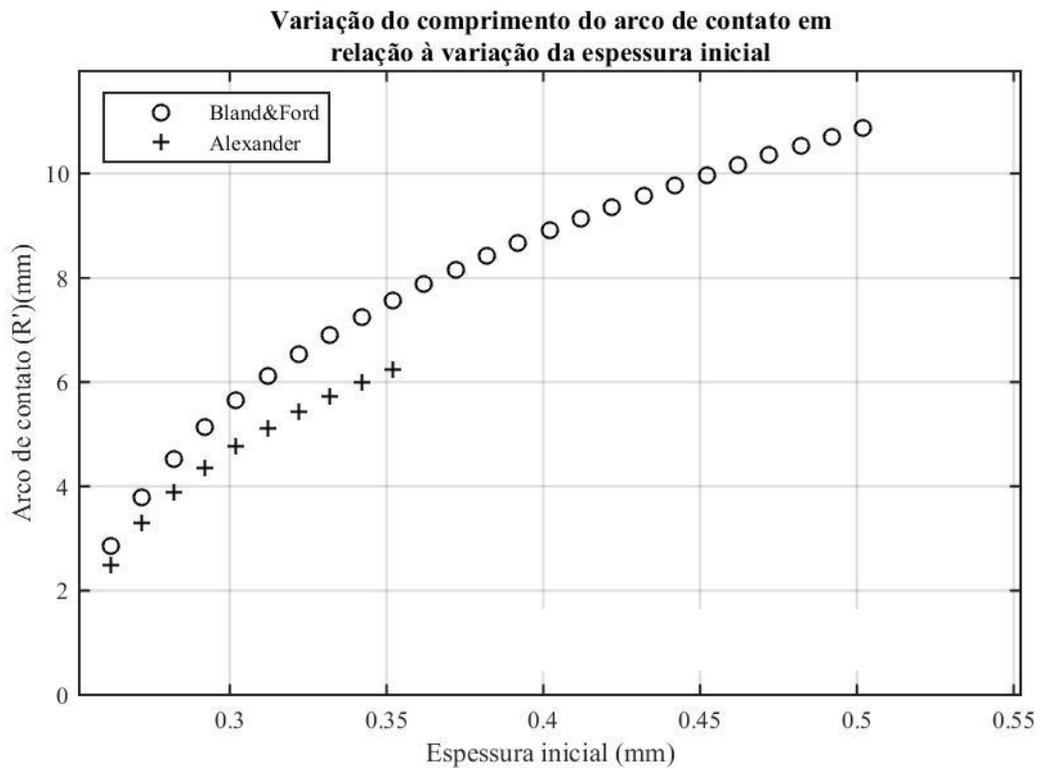
A espessura inicial foi variada de 0.262 a 0.502 mm com um incremento de 0.01 mm, mantendo-se constante todos os outros parâmetros para o Caso 2. Nas figuras 32, 33, 34 e 35 são mostrados os resultados encontrados para o Caso 2.

**Figura 32 - Efeito da variação da espessura inicial na carga de laminação (Caso 2).**



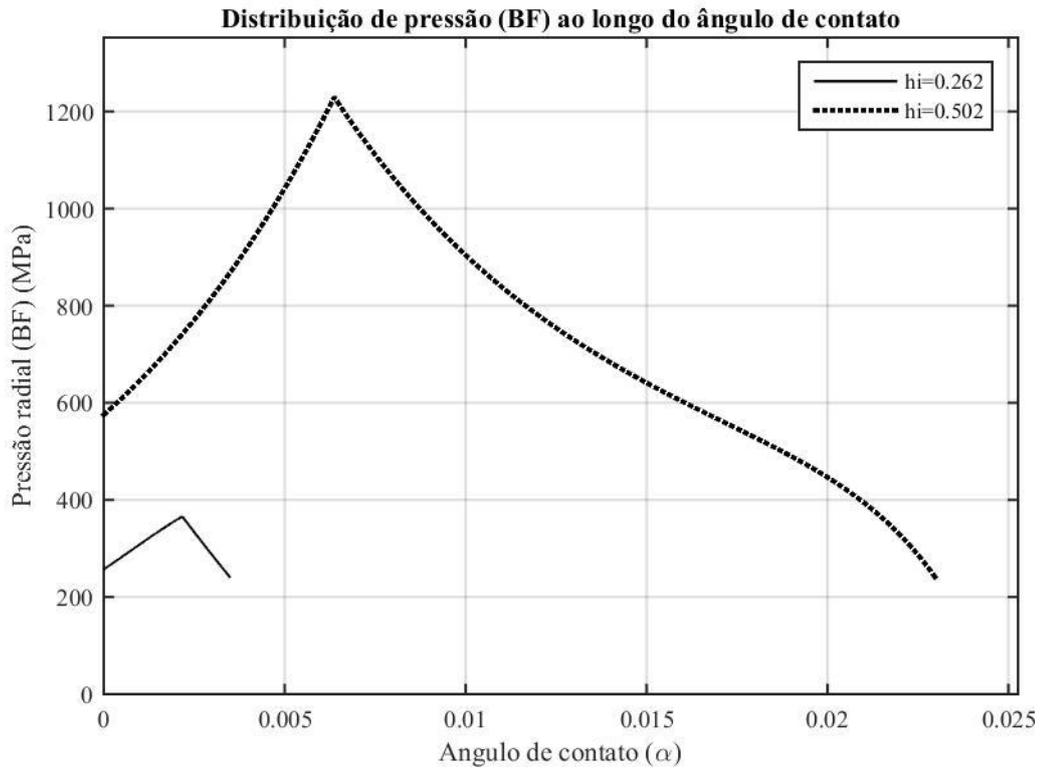
Fonte: Próprio autor.

**Figura 33 - Efeito da variação da espessura inicial no comprimento do arco de contato (Caso 2).**



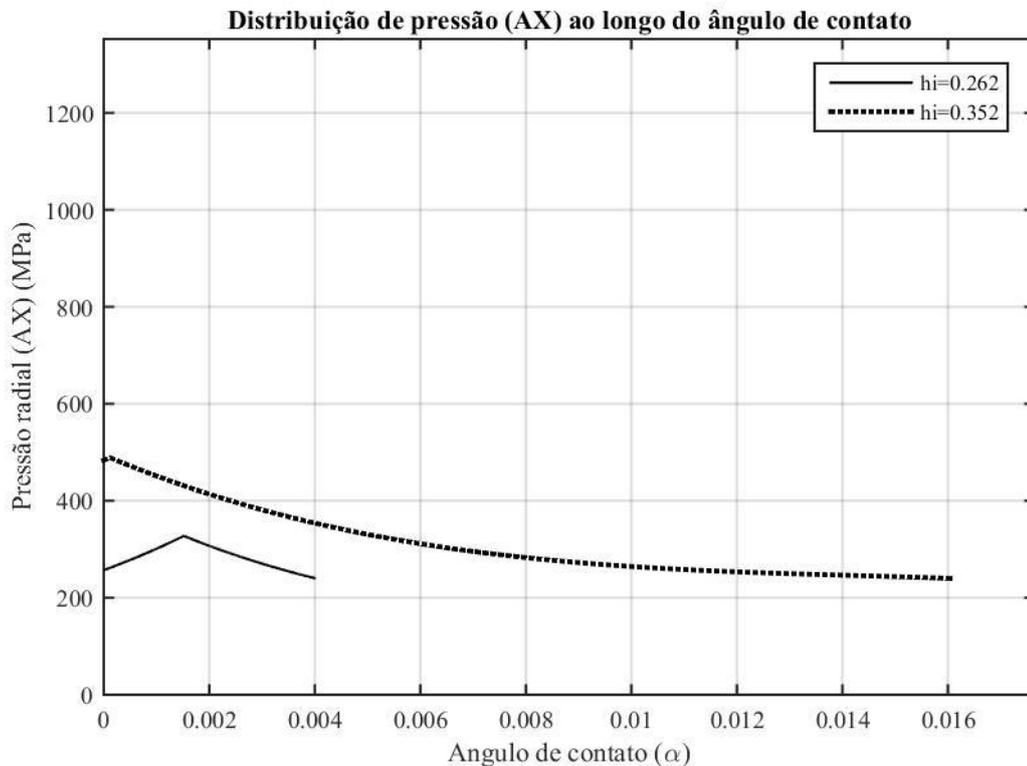
Fonte: Próprio autor.

**Figura 34 - Efeito da variação da espessura inicial na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford.**



Fonte: Próprio autor.

**Figura 35 - Efeito da variação da espessura inicial na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

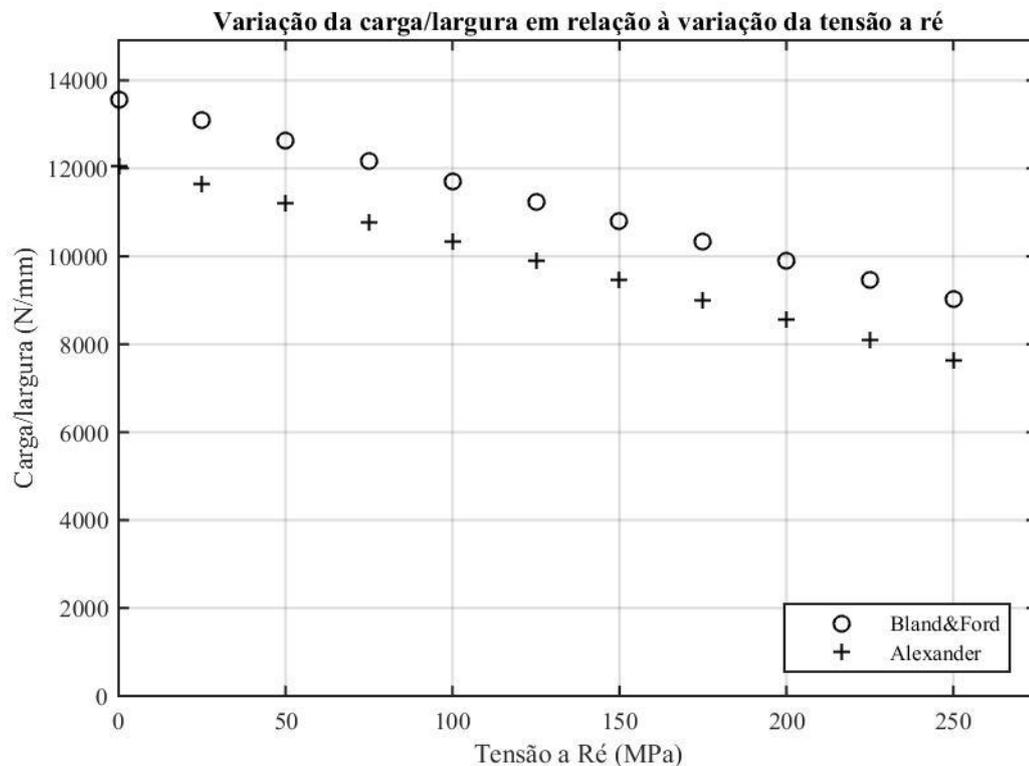
Naturalmente um aumento da espessura inicial (para uma mesma espessura final), representando um aumento na redução aplicada, causa um aumento gradual da carga de laminação e também do comprimento do arco de contato. Isto é verificado através das figuras 28, 29, 32 e 33. Nas figuras 32 e 33, pode-se perceber que o modelo de Alexander para de convergir a partir de certo valor de espessura inicial. Segundo Helman e Celtin (2005) isto significa que a partir desta condição de operação, qualquer aumento de carga deixa de ter efeito sobre a deformação da chapa, de modo que os cilindros de laminação estariam tão achatados que a área de contato seria muito grande e a pressão exercida pelos cilindros seria mais baixa do que a necessária para provocar deformação plástica no material da chapa.

As figuras 30, 31 mostram que o aumento da redução causa um aumento muito expressivo no ângulo de contato.

### 5.5 Efeito da variação da tensão a ré

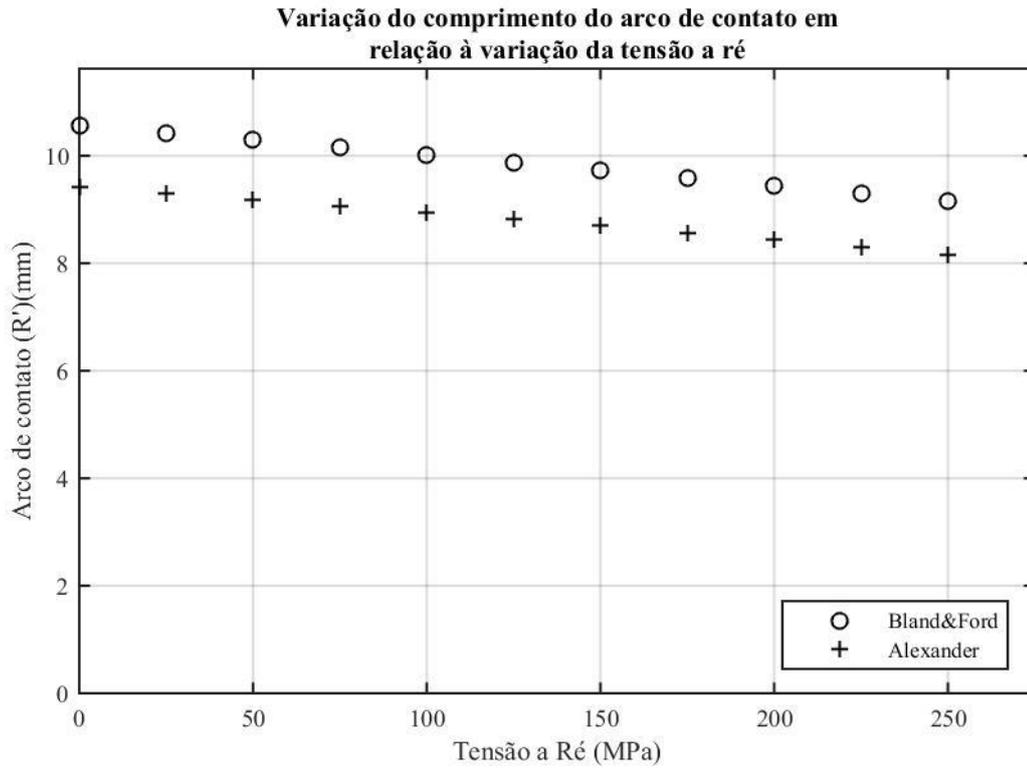
A tensão a ré foi variada entre 0 e 250 MPa com um incremento de 25 MPa para o Caso 1. As figuras 36, 37, 38 e 39 mostram os resultados encontrados para o Caso 1.

Figura 36 - Efeito da variação da tensão a ré na carga de laminação (Caso 1).



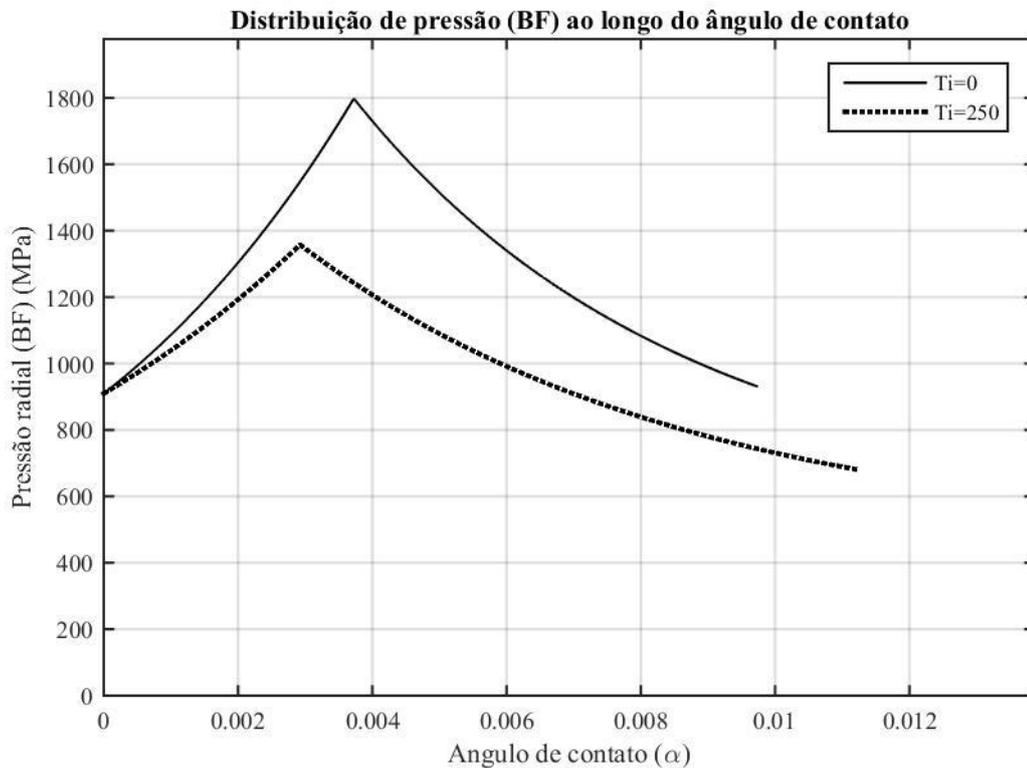
Fonte: Próprio autor.

**Figura 37 - Efeito da variação da tensão a ré no comprimento do arco de contato (Caso 1).**



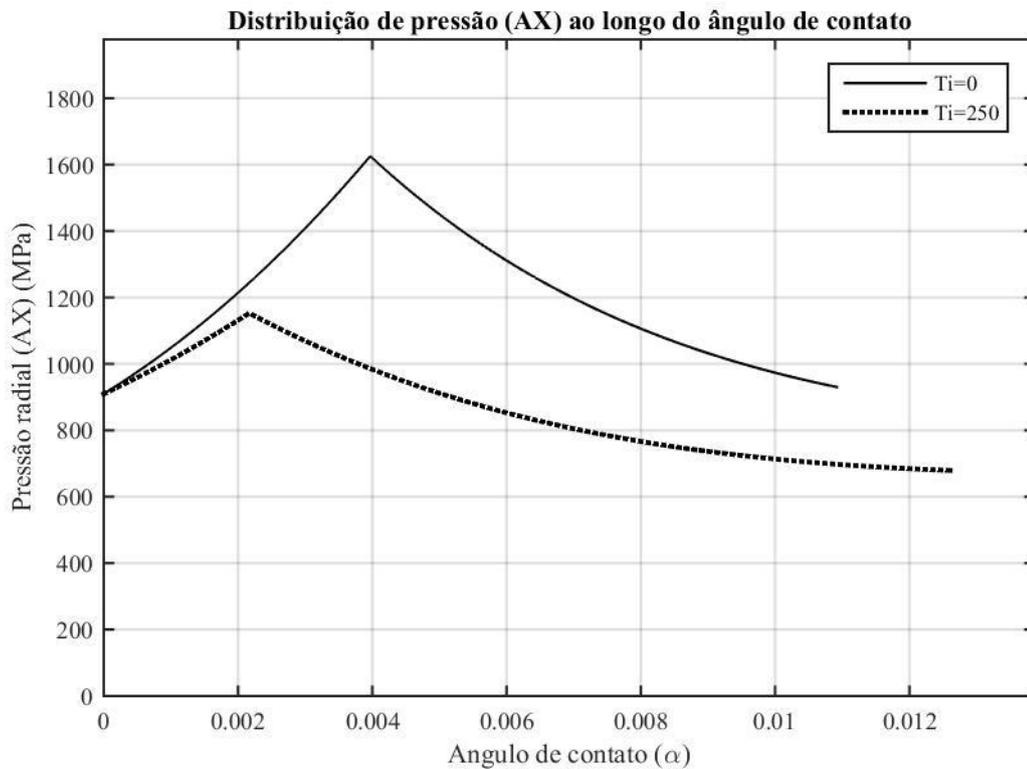
Fonte: Próprio autor.

**Figura 38 - Efeito da variação da tensão a ré na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford.**



Fonte: Próprio autor.

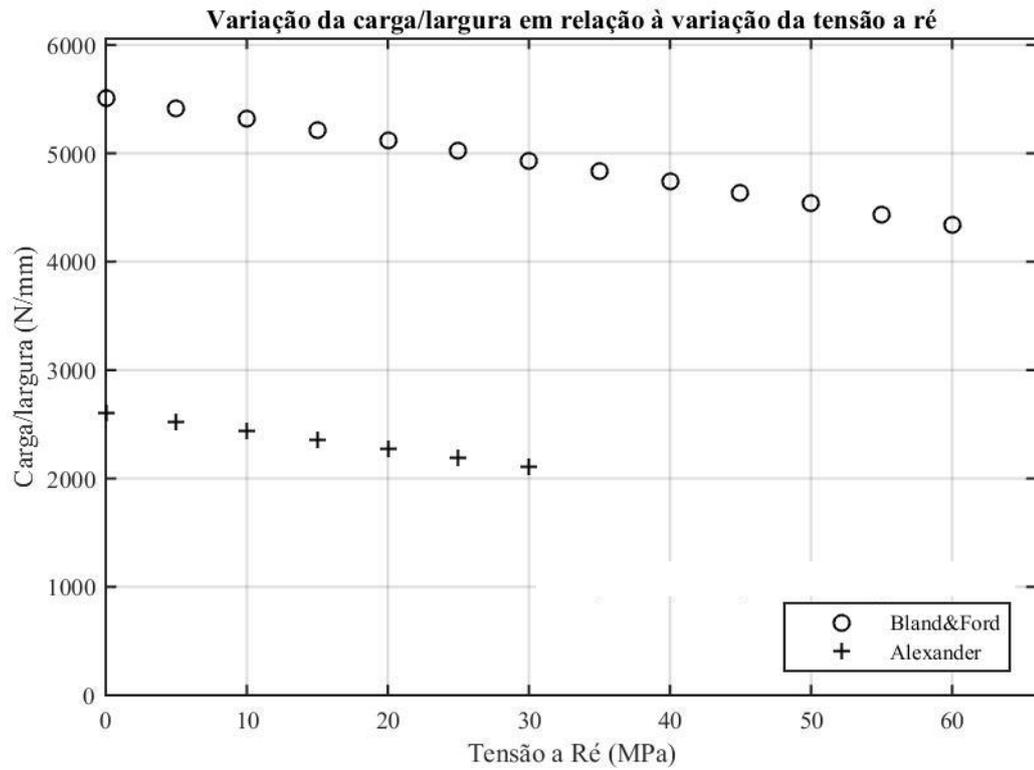
**Figura 39 - Efeito da variação da tensão a ré na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

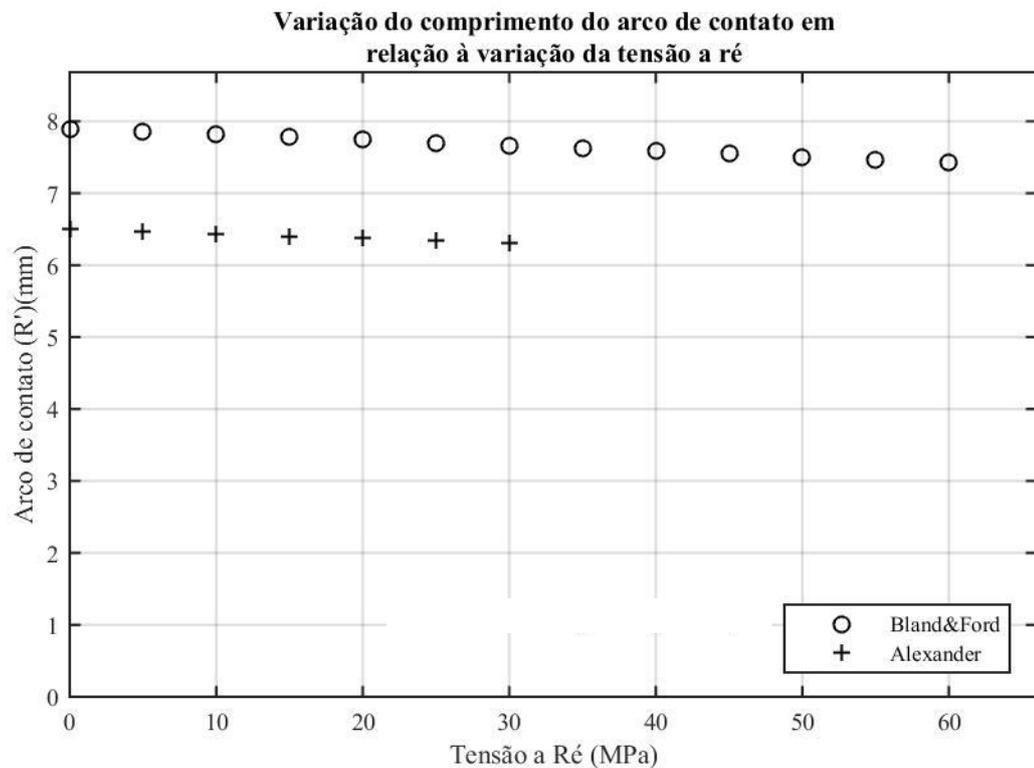
A tensão a ré foi variada entre 0 e 60 MPa com um incremento de 5 MPa para o Caso 2. As figuras 40, 41, 42 e 43 mostram os resultados encontrados para o Caso 2.

**Figura 40 - Efeito da variação da tensão a ré na carga de laminação (Caso 2).**



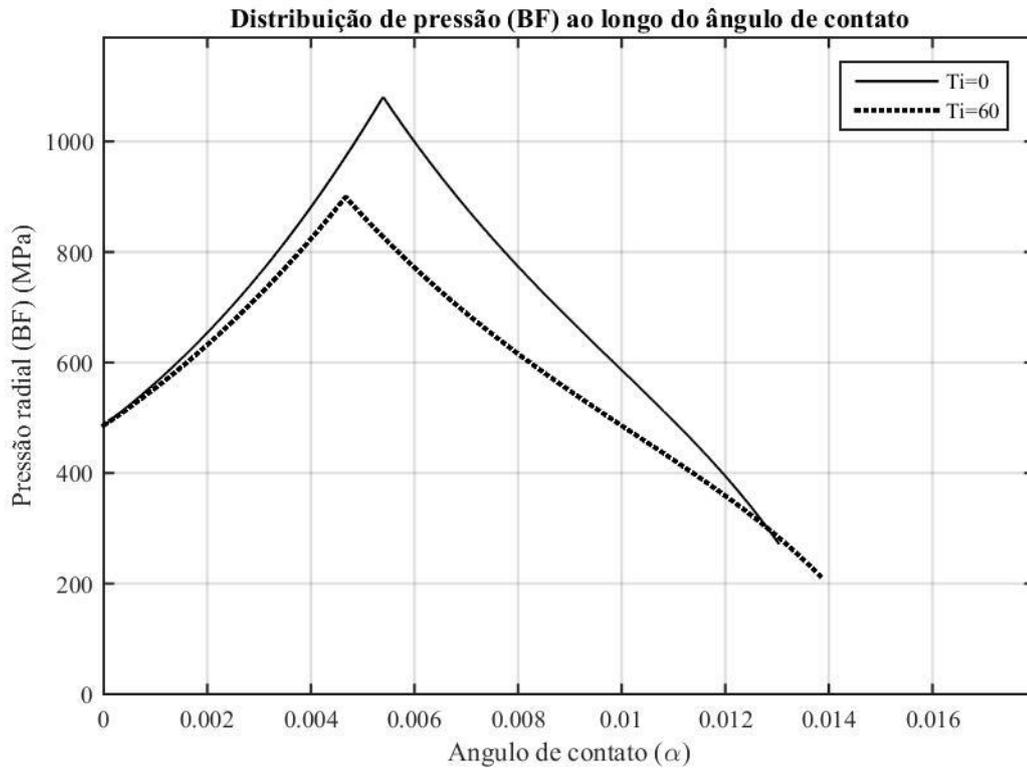
Fonte: Próprio autor.

**Figura 41 - Efeito da variação da tensão a ré no comprimento do arco de contato (Caso 2).**



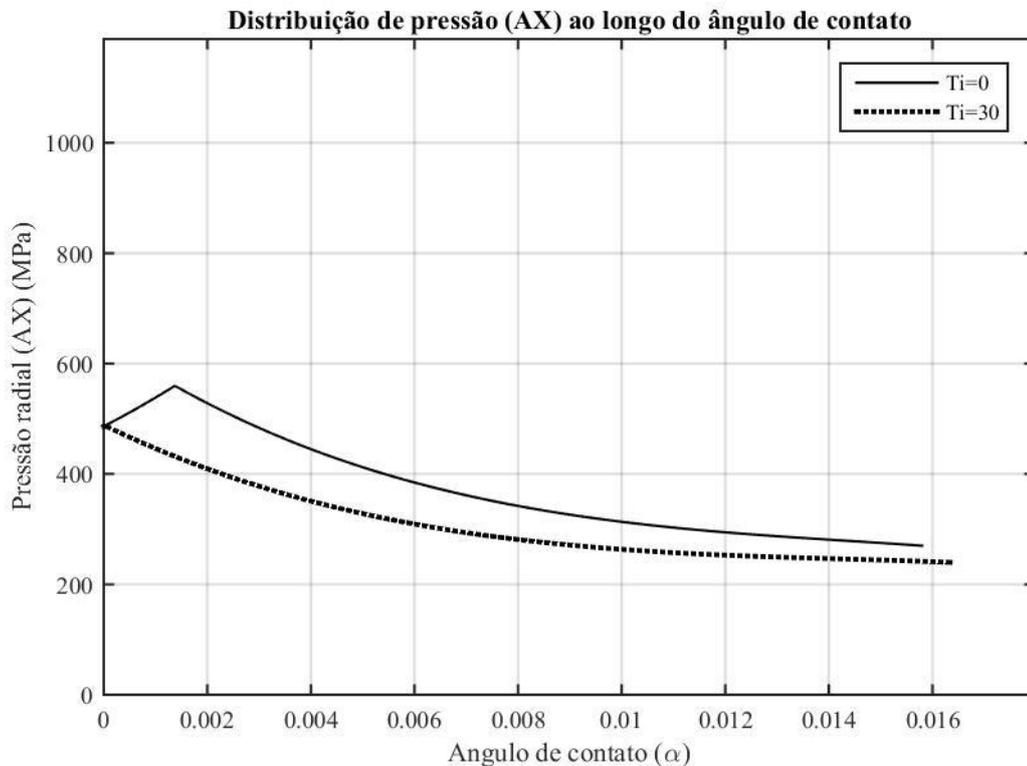
Fonte: Próprio autor.

**Figura 42 - Efeito da variação da tensão a ré na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford.**



Fonte: Próprio autor.

**Figura 43 - Efeito da variação da tensão a ré na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

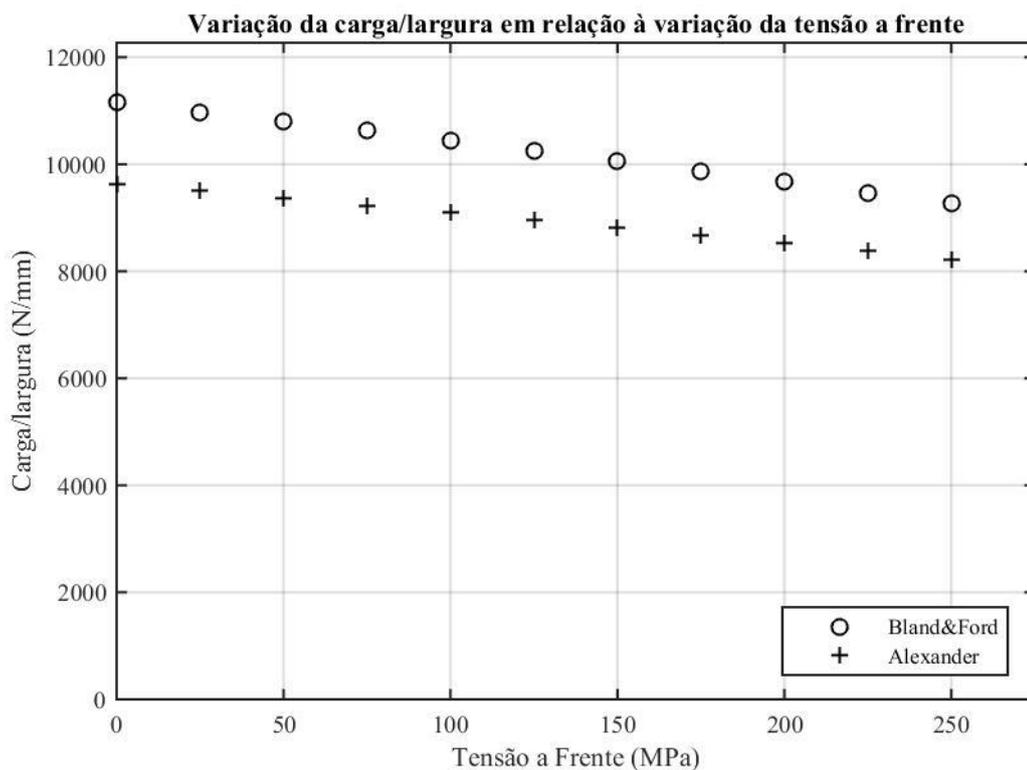
A tensão a ré tem efeito contrário a todos os outros já analisados até este ponto. Ao aumentar-se a tensão a ré ocorre a diminuição da carga de laminação e no comprimento do arco de contato, como evidenciado pelas figuras 36, 37, 40 e 41. O aumento da tensão a ré tem resultado expressivo na diminuição da carga de laminação, porem o efeito no arco de contato é bem sutil.

De maneira menos efetiva, o aumento da tensão a ré causa um ligeiro aumento no ângulo de contato. Nas figuras 38, 39, 42 e 43 é mostrado que o aumento da tensão a ré desloca o ponto neutro para mais próximo da saída.

### 5.6 Efeito da variação da tensão a frente

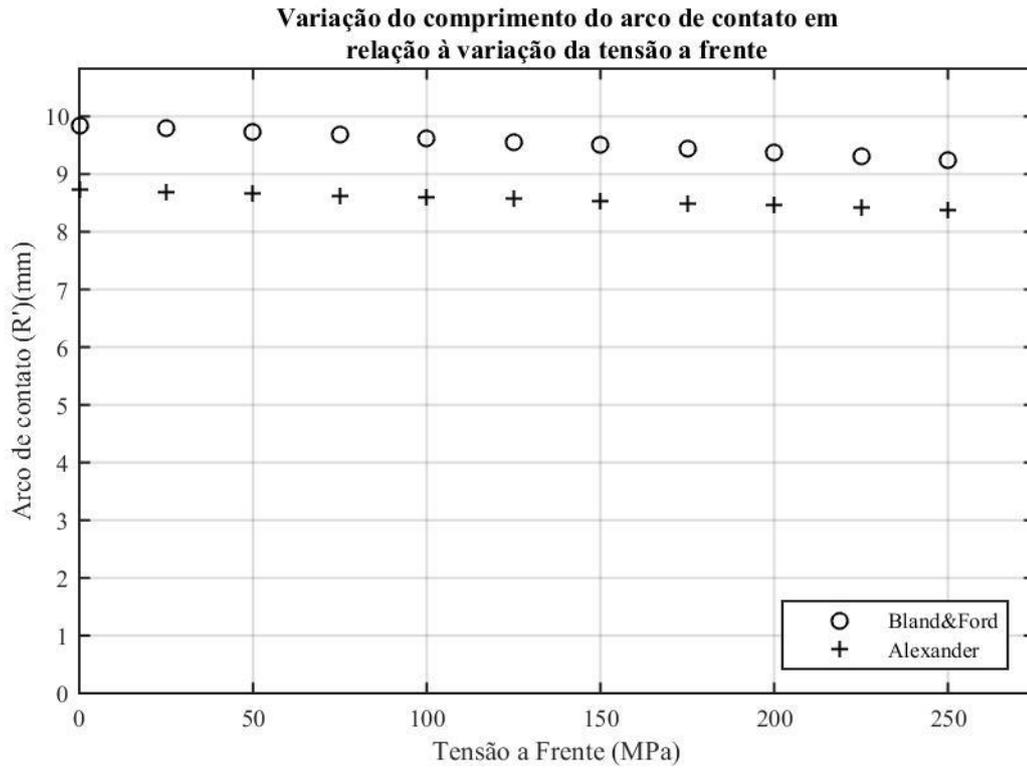
A tensão a frente variou entre 0 e 250 MPa com um incremento de 25 MPa para o Caso 1. As figuras 44, 45, 46 e 47 mostram os resultados encontrados para o Caso 1.

**Figura 44 - Efeito da variação da tensão a frente na carga de laminação (Caso 1).**



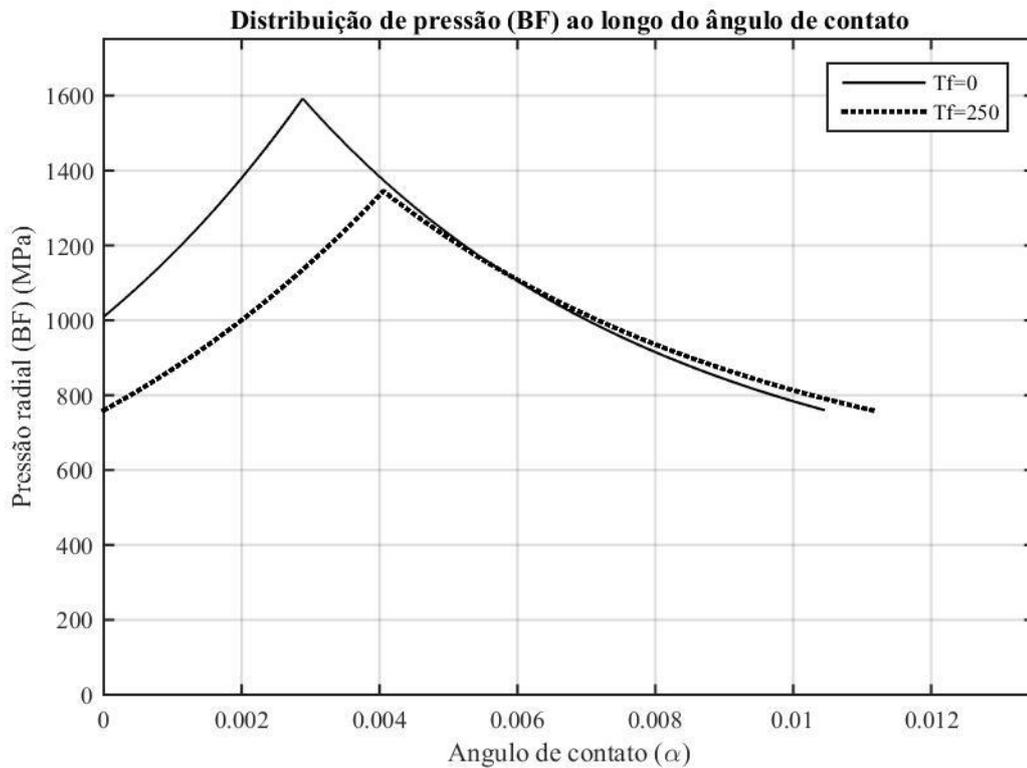
Fonte: Próprio autor.

Figura 45 - Efeito da variação da tensão a frente no comprimento do arco de contato (Caso 1).



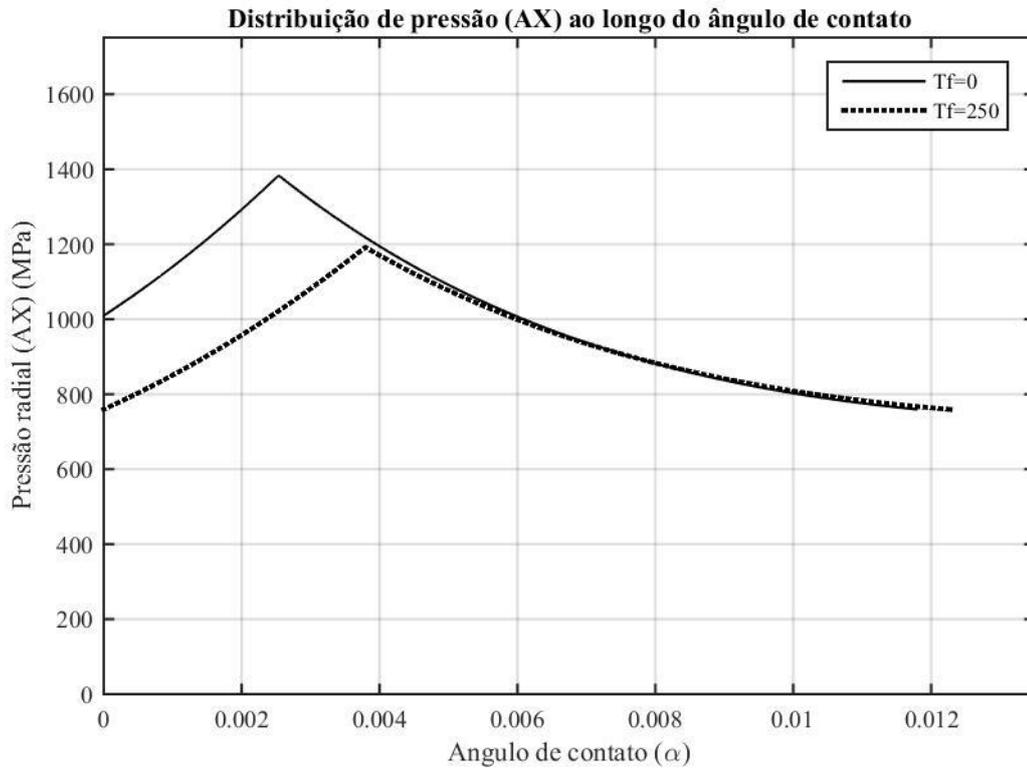
Fonte: Próprio autor.

Figura 46 - Efeito da variação da tensão a frente na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Bland e Ford.



Fonte: Próprio autor.

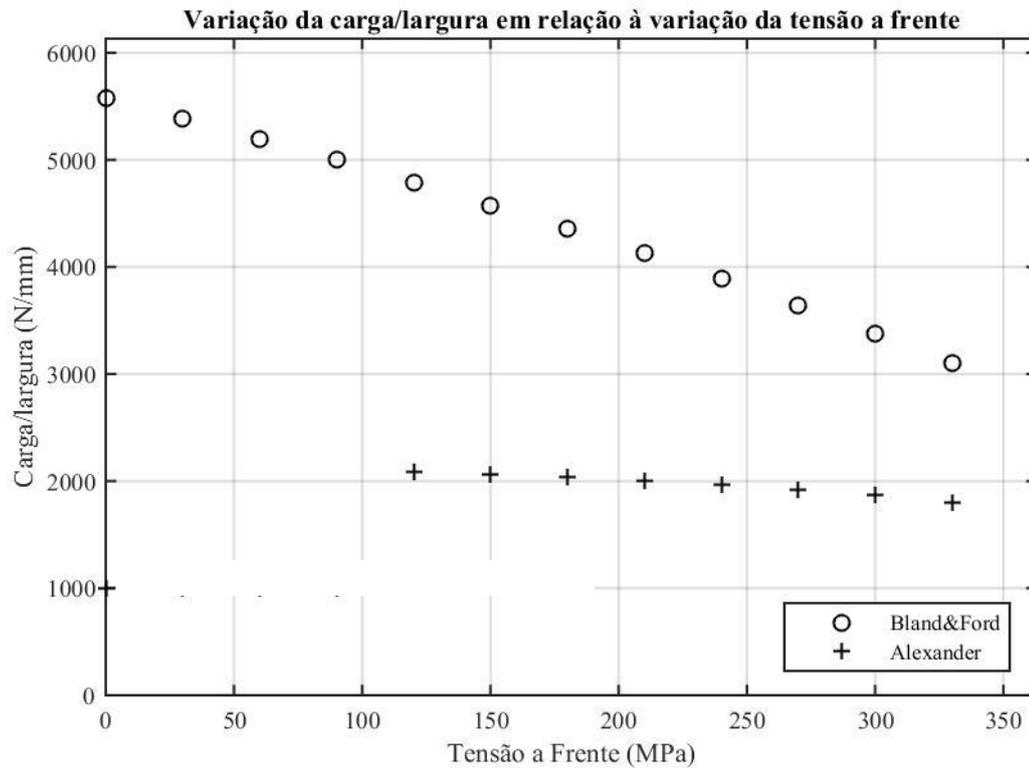
**Figura 47 - Efeito da variação da tensão a frente na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 1 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

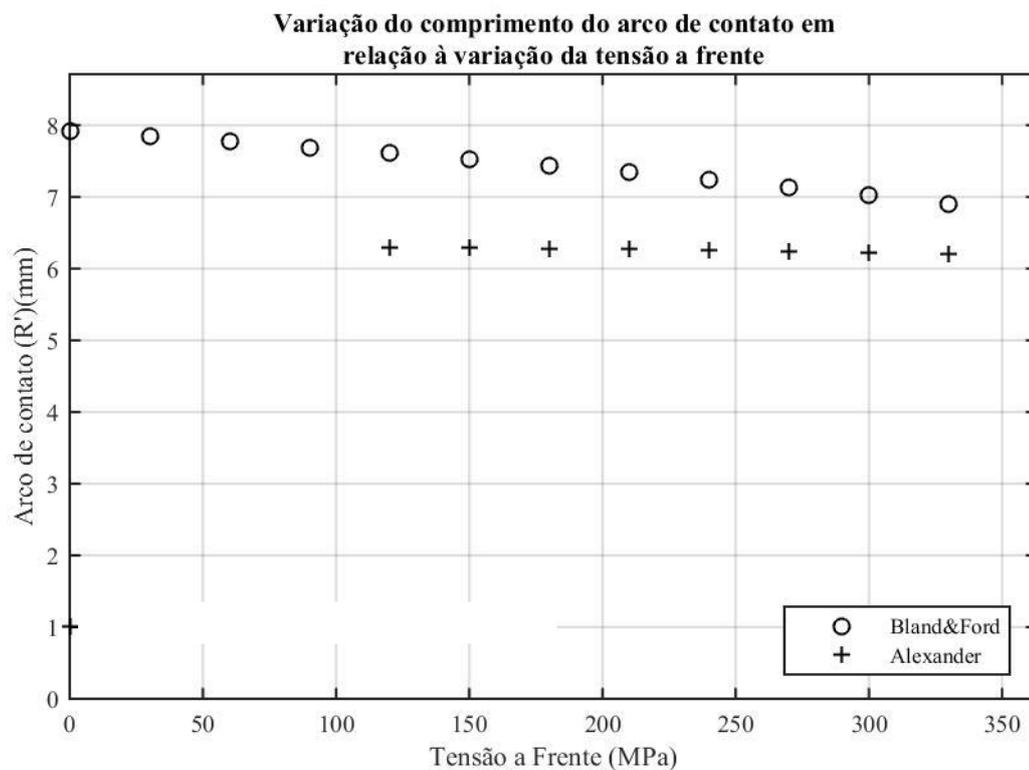
A tensão a frente variou entre 0 e 330 MPa com um incremento de 30 MPa para o Caso 2. As figuras 48, 49, 50 e 51 mostram os resultados encontrados para o este caso.

**Figura 48 - Efeito da variação da tensão a frente na carga de laminação (Caso 2).**



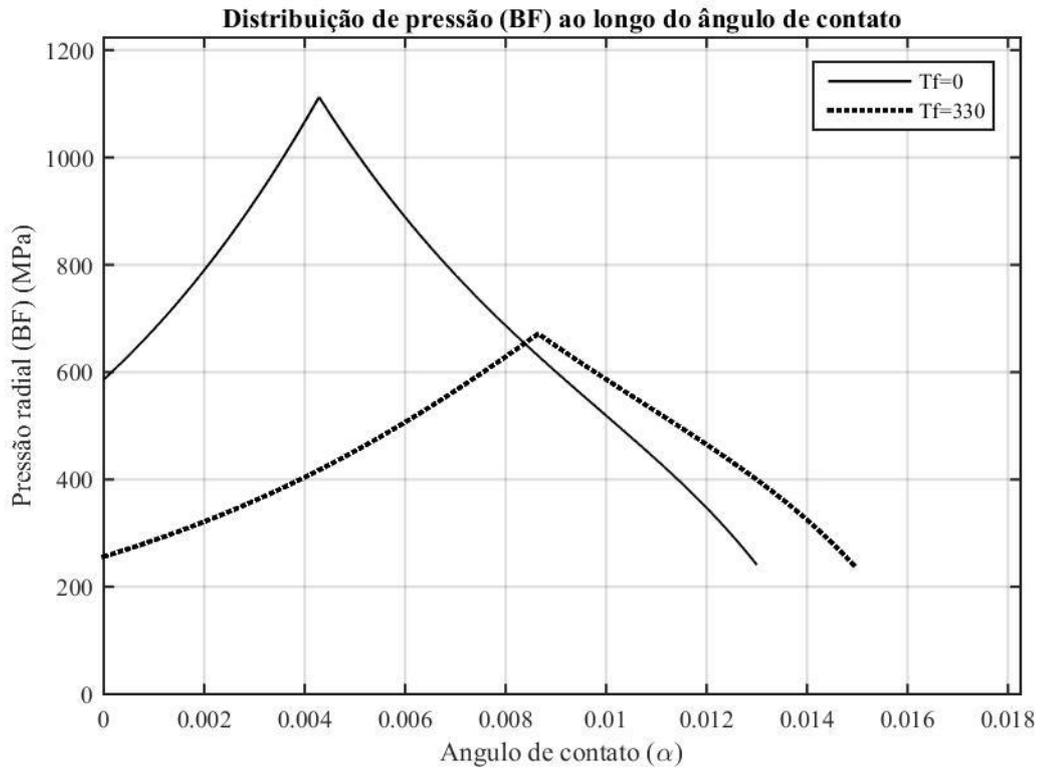
Fonte: Próprio autor.

**Figura 49 - Efeito da variação da tensão a frente no comprimento do arco de contato (Caso 2).**



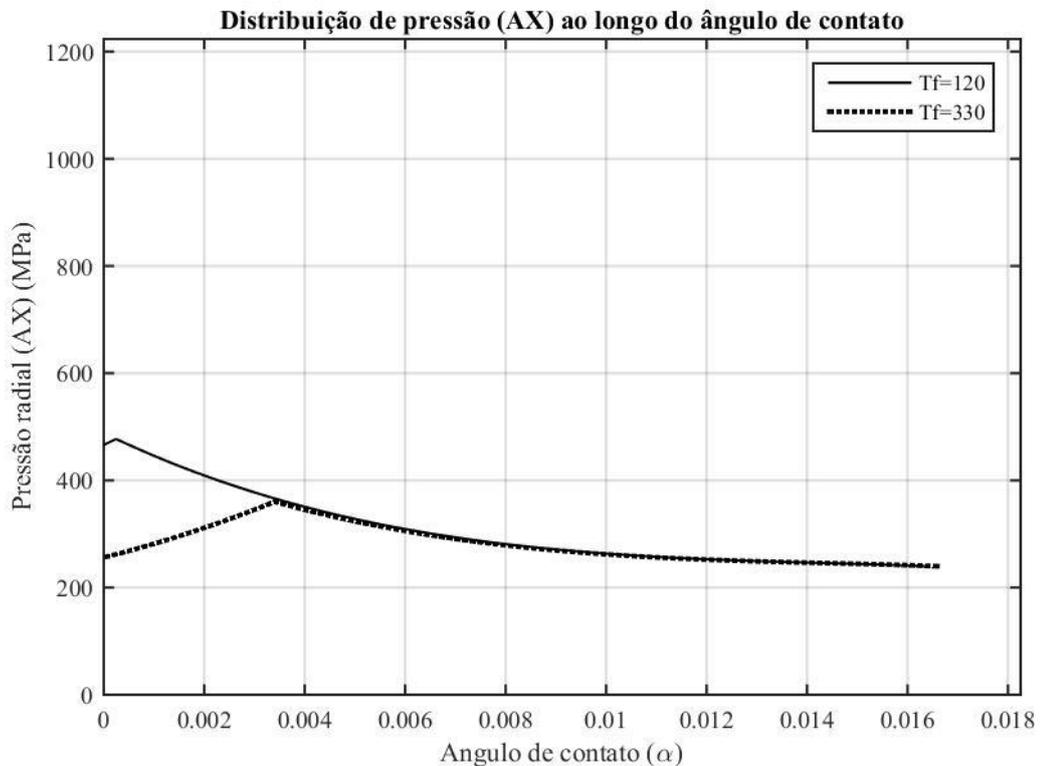
Fonte: Próprio autor.

**Figura 50 - Efeito da variação da tensão a frente na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Bland e Ford.**



Fonte: Próprio autor.

**Figura 51 - Efeito da variação da tensão a frente na distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo de Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

Percebe-se comparando as figuras 36, 40 e 44, 48 que a variação da tensão a ré é muito mais efetiva para reduzir-se a carga de laminação do que a variação da tensão a frente. O aumento da tensão a frente gera uma redução na carga de laminação e no comprimento do arco de contato, como evidenciado pelos gráficos das figuras 44, 45, 48 e 49, porém o aumento da tensão a ré exerce o mesmo efeito, mas de maneira muito mais eficiente, pois reduz mais a carga.

A influência da tensão a frente no comprimento do arco de contato é pequena, como verificado nas figuras 45 e 59.

E nas figuras 46, 47, 50 e 51 observa-se novamente que nos modelos de Bland e Ford e Alexander o aumento da tensão a frente causa um ligeiro aumento no ângulo de contato e desloca o ponto neutro para mais próximo da entrada.

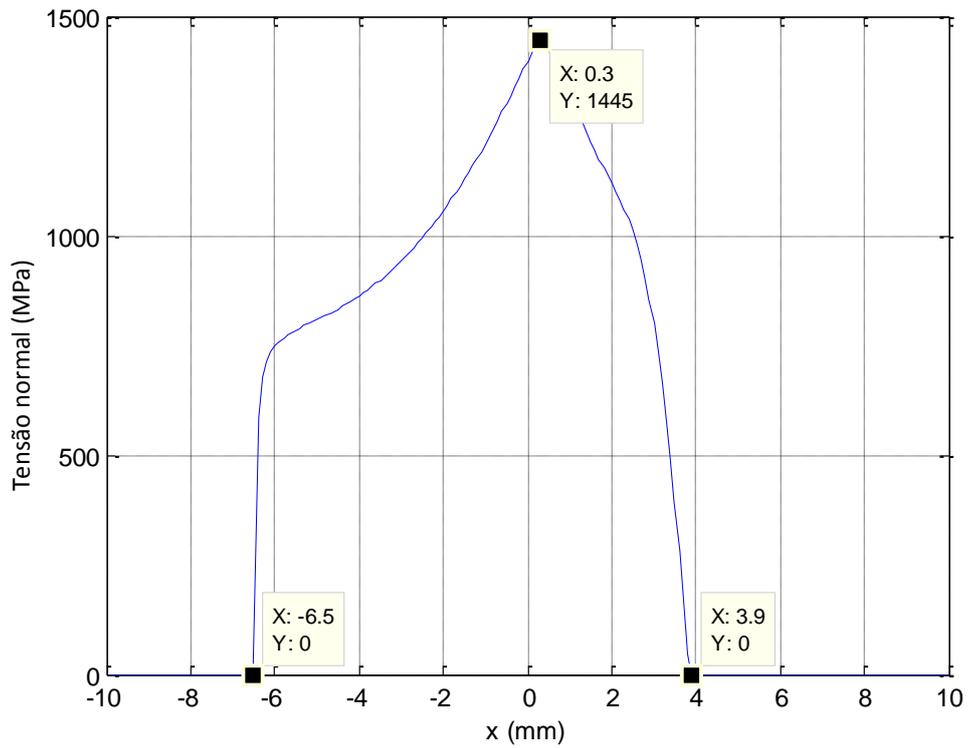
Fazendo-se um paralelo entre as figuras 36 a 43 e 44 a 51 a variação da tensão a ré é muito mais sensível do que a variação da tensão a frente.

### **5.7 Comparação com modelo Non-Circular (não-circular)**

Hoje em dia, nos modelos matemáticos mais modernos do processo de laminação a frio, sabe-se que na laminação de chapas muito encruadas e muito finas, o cilindro de laminação sofre grande deformação elástica de modo que o arco de contato é considerado como sendo formado por uma superfície não circular variável, composta por uma região interna de zero redução (SHIGAKI et al., 2015). Tais modelos chamados de não-circular, não são ainda aplicados para o controle *online* nos processos industriais de laminação devido à enorme necessidade computacional requerida, com tempos de processamento inviáveis para o controle imediato dos parâmetros de laminação.

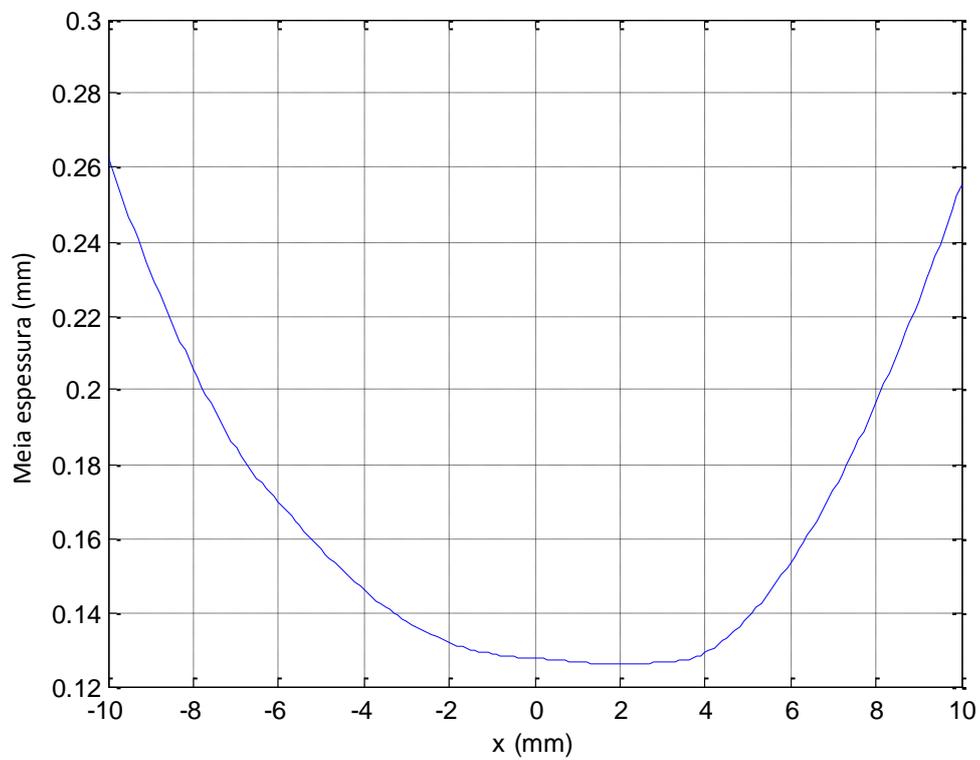
Porém estes modelos são extremamente fiéis a realidade física a qual o cilindro de laminação está submetido, sendo considerados o que existe de mais moderno e preciso para estes cálculos. O modelo (NONCIRC) estudado pelos autores Shigaki et al (2015) inclui um modelo bidimensional de cálculo de carga bastante exato acoplado à um modelo MEF (método dos elementos finitos) que permite previsão de planicidade/perfil da tira laminada e a forma deformada do cilindro de laminação. Para efeito de comparação e contraprova com os modelos programados de Bland e Ford e Alexander, os Casos 1 e 2 foram executados no modelo NONCIRC e os resultados podem ser visualizados nas figuras 52, 53, 55 e 56.

Figura 52 - Distribuição de pressões ao longo da distância x para o Caso 1 segundo o modelo NONCIRC.



Fonte: Shigaki et al (2015).

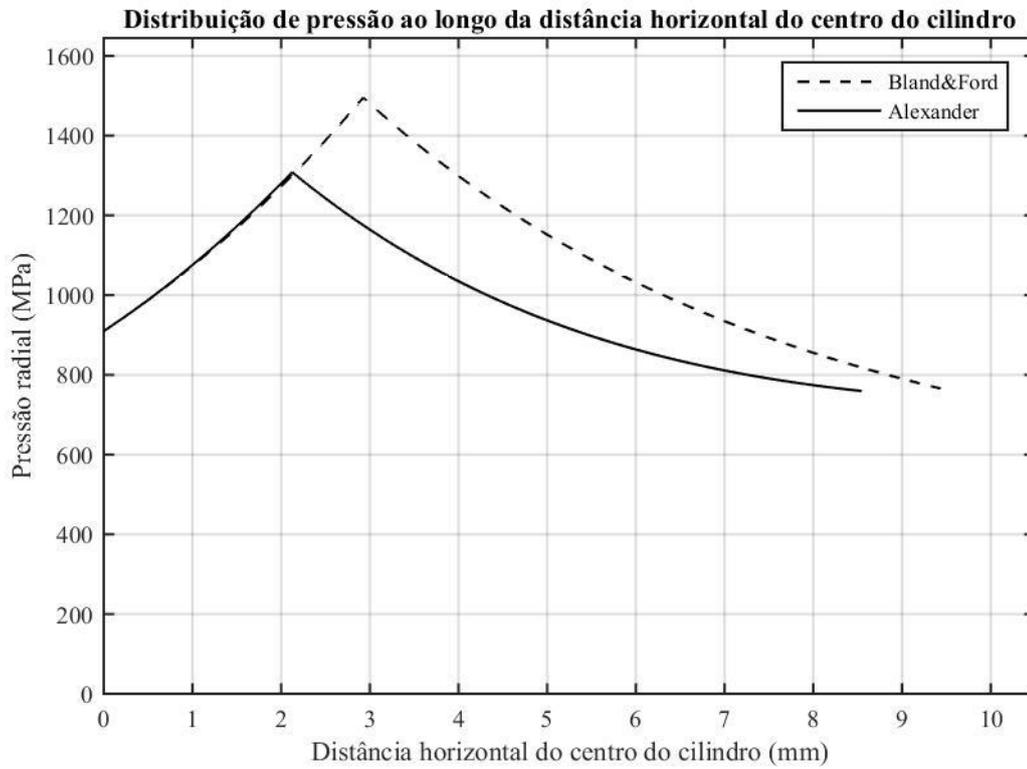
Figura 53 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 1 segundo o modelo NONCIRC.



Fonte: Shigaki et al (2015).

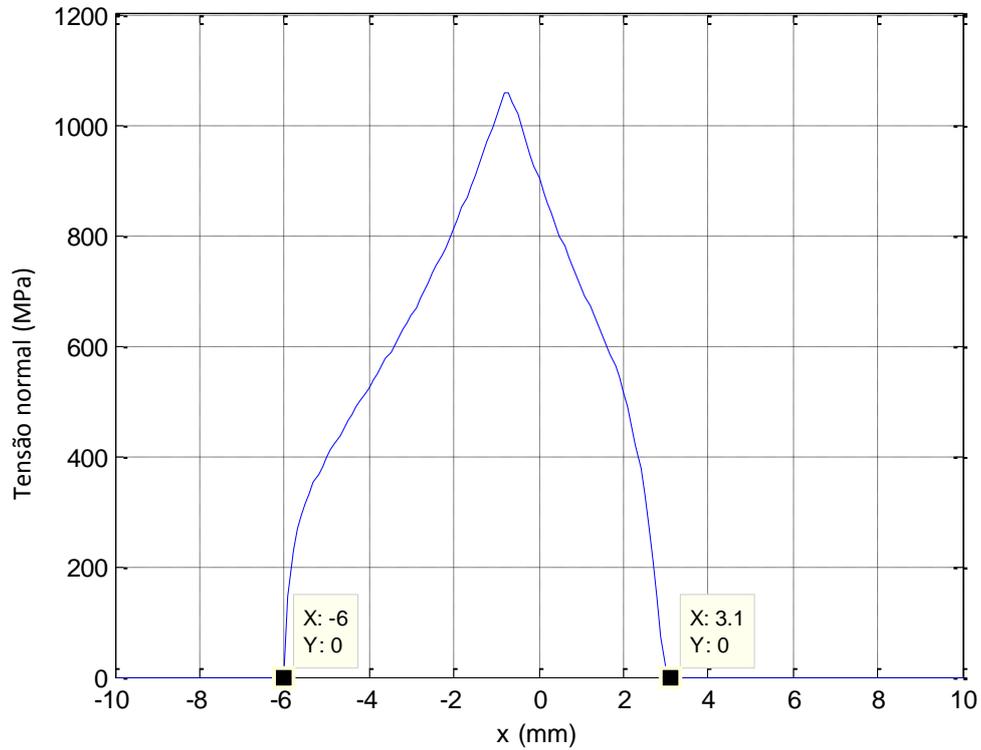
Na figura 54 abaixo é mostrada a distribuição de pressão calculada pelo o modelo de Bland e Ford e Alexander para o Caso 1.

**Figura 54 - Distribuição de pressões ao longo da distância horizontal do centro do cilindro para o Caso 1 segundo os modelos de Bland e Ford e Alexander.**



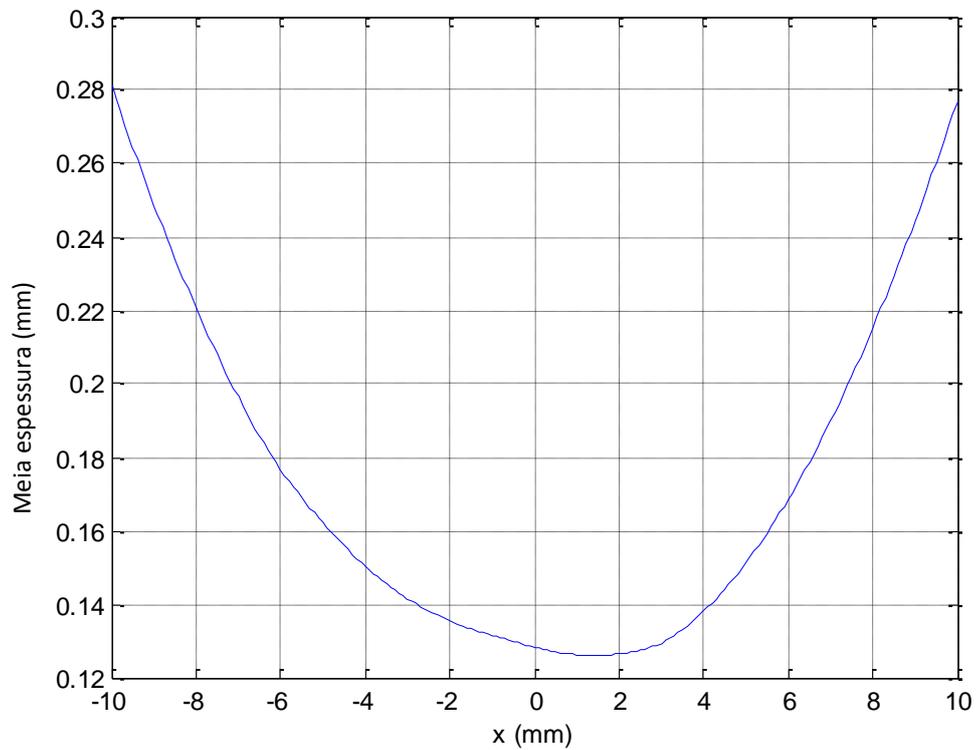
Fonte: Próprio autor.

**Figura 55 - Distribuição de pressões ao longo do ângulo de contato para o Caso 2 segundo o modelo NONCIRC.**



Fonte: Shigaki et al (2015).

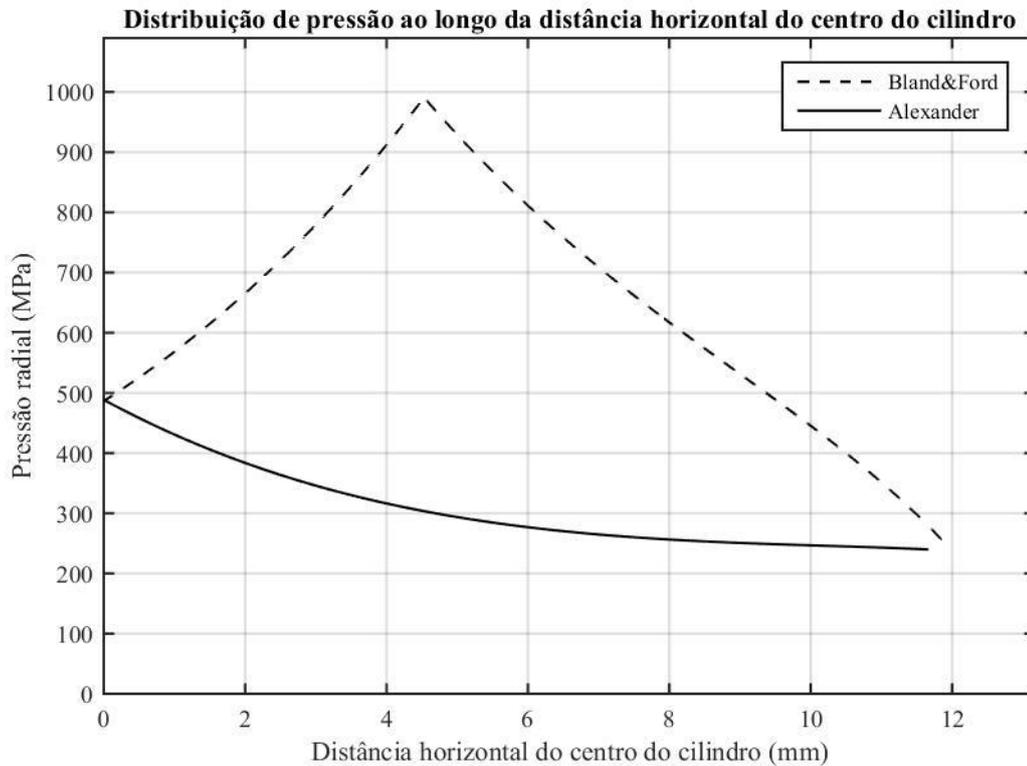
**Figura 56 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 2 segundo o modelo NONCIRC.**



Fonte: Shigaki et al (2015).

Na figura 57 abaixo é mostrada a distribuição de pressão calculada pelo o modelo de Bland e Ford e Alexander para o Caso 2.

**Figura 57 - Distribuição de pressões ao longo da distância horizontal do centro do cilindro para o Caso 2 segundo os modelos de Bland e Ford e Alexander.**



Fonte: Próprio autor.

As tabelas 2 e 3 mostram os valores de carga de laminação/largura e comprimento do arco de contato calculado com o raio deformado e com o raio inicial do cilindro para todos os modelos estudados para os Casos 1 e 2.

**Tabela 2 - Comparativo para o Caso 1.**

Caso 1			
Programa	Carga total de laminação/largura ( $P/w$ ) (N/mm)	Comprimento do arco de contato ( $R'$ ) (mm)	Comprimento do arco de contato ( $R$ ) (mm)
Bland e Ford	$1.0330 \times 10^4$	9.5832	5.3460
Alexander	$9.0101 \times 10^3$	8.5741	5.3460
NONCIRC	$1.0237 \times 10^4$	10.100	-

Fonte: Próprio autor e Shigaki et al (2015).

Tabela 3 - Comparativo para o Caso 2.

Caso 2			
Programa	Carga total de laminação/largura ( $P/w$ ) (N/mm)	Comprimento do arco de contato ( $R'$ ) (mm)	Comprimento do arco de contato ( $R$ ) (mm)
Bland e Ford	$4.9300 \times 10^3$	7.6661	5.3460
Alexander	$2.1033 \times 10^3$	6.2986	5.3460
NONCIRC	$5.7039 \times 10^3$	9.1000	-

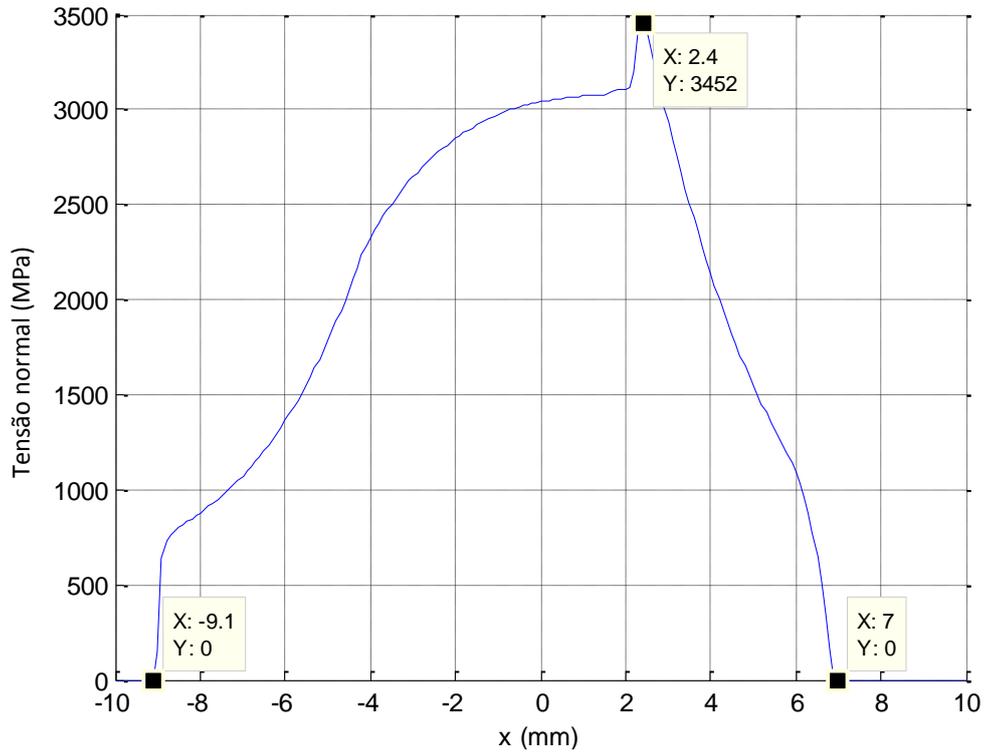
Fonte: Próprio autor e Shigaki et al (2015).

Como pode ser verificado pelas tabelas 1 e 2 ambos os modelos implementados apresentam boa coerência com os valores encontrados pelo modelo NONCIRC. Uma atenção especial deve ser dada ao cálculo do comprimento do arco de contato (equação 1, sem aproximações), que segundo o autor Lenard (2007) não indica a utilização do raio deformado. Entretanto verificou-se que valores mais próximos do modelo NONCIRC foram encontrados ao utilizar-se o valor do raio deformado ( $R'$ ) do cilindro para este cálculo.

Para enriquecimento, o modelo NONCIRC foi executado para alguns outros casos de laminação, os parâmetros utilizados foram os seguintes:

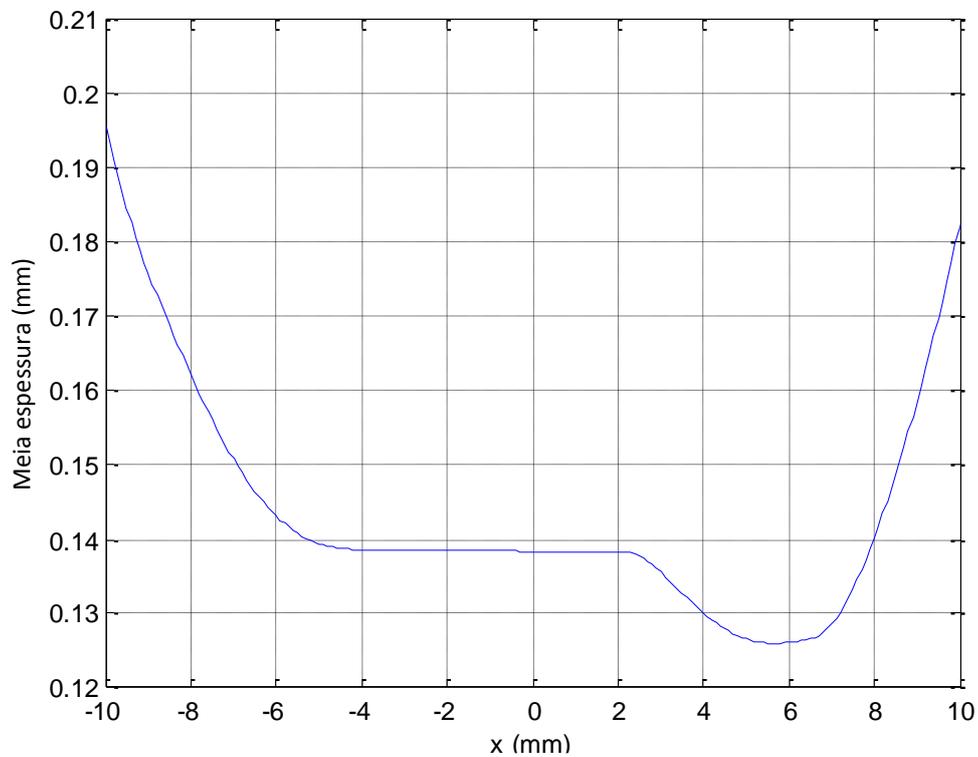
- Caso 3 – Todos os parâmetros iguais ao caso 1 (ref. pág. 37), porem o coeficiente de atrito foi de 0.04. Figuras 58 e 59.
- Caso 4 – Todos os parâmetros iguais ao caso 2 (ref. pág. 38), porem o coeficiente de atrito foi de 0.02. Figuras 60 e 61.
- Caso 5 – Todos os parâmetros iguais ao caso 2 (ref. pág. 38), porem o coeficiente de atrito foi de 0.04. Figuras 62 e 63.

**Figura 58 - Distribuição de pressões ao longo da distância x para o Caso 3 segundo o modelo NONCIRC.**

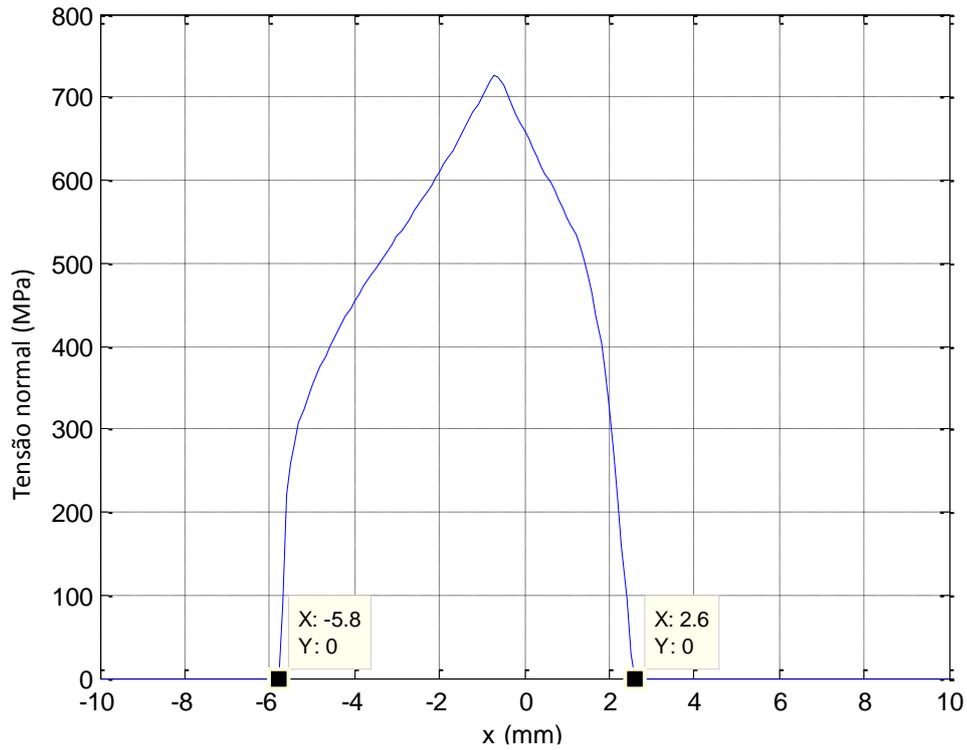


Fonte: Shigaki et al (2015).

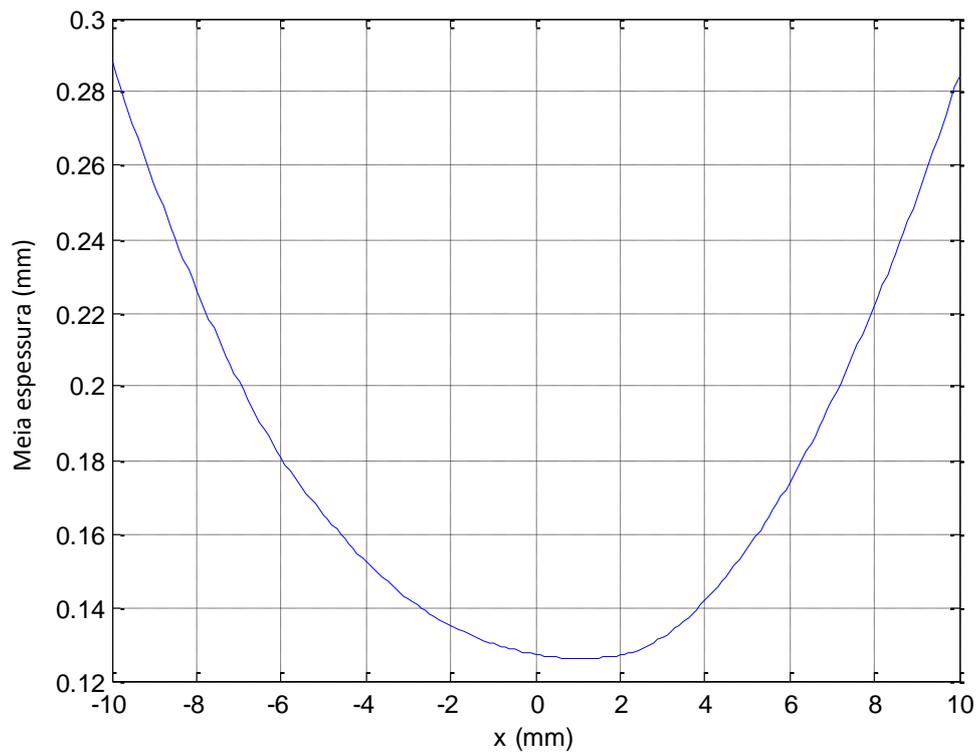
**Figura 59 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 3 segundo o modelo NONCIRC.**



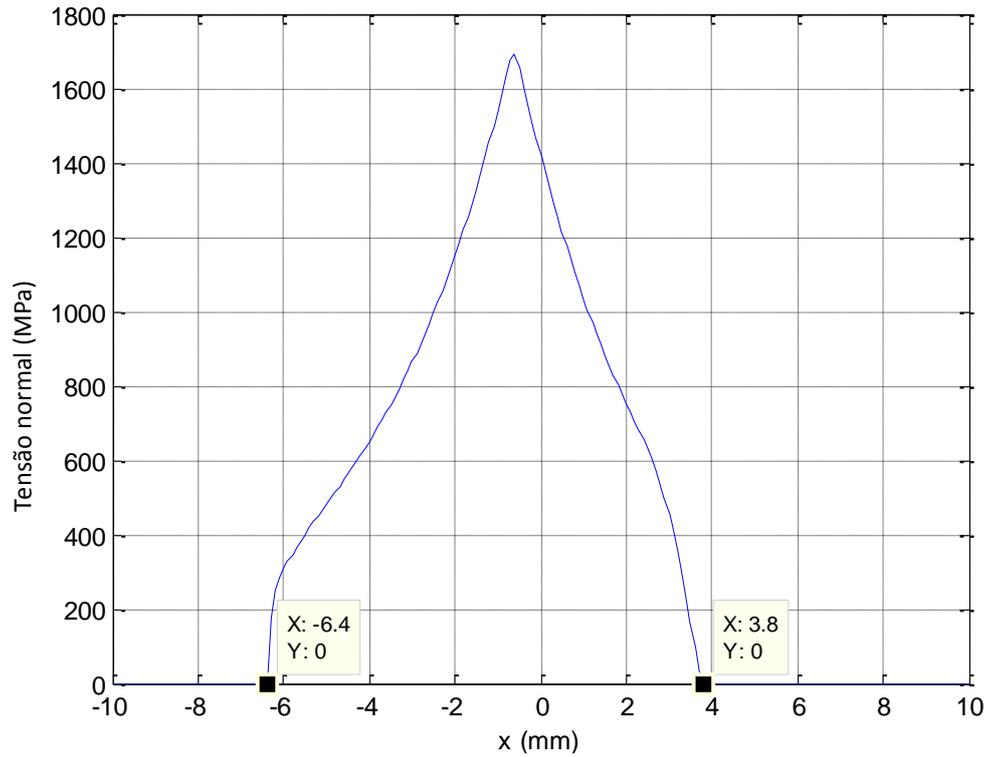
Fonte: Shigaki et al (2015).

**Figura 60 - Distribuição de pressões ao longo da distância x para o Caso 4 segundo o modelo NONCIRC.**

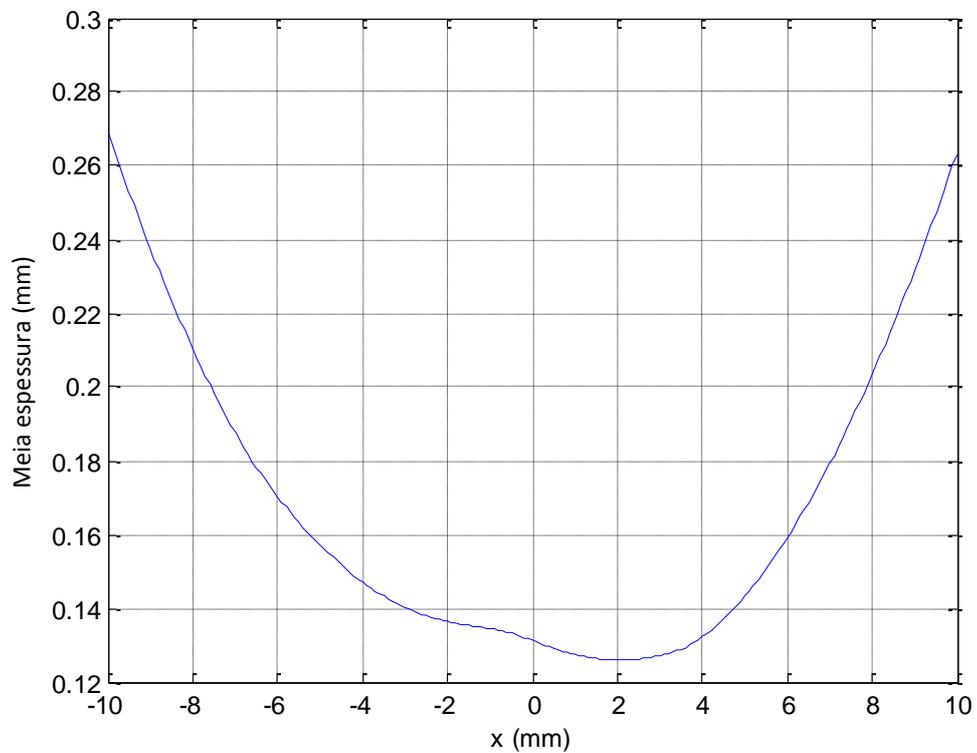
Fonte: Shigaki et al (2015).

**Figura 61 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 4 segundo o modelo NONCIRC.**

Fonte: Shigaki et al (2015).

**Figura 62 - Distribuição de pressões ao longo da distância x para o Caso 5 segundo o modelo NONCIRC.**

Fonte: Shigaki et al (2015).

**Figura 63 - Formato deformado do cilindro de trabalho para o Caso 5 segundo o modelo NONCIRC.**

Fonte: Shigaki et al (2015).

**Tabela 4 – Valores de carga e comprimento do arco de contato segundo o modelo NONCIRC.**

<b>NONCIRC</b>	<b>Carga total de laminação/largura (<math>P/w</math>) (N/mm)</b>	<b>Comprimento do arco de contato (mm)</b>
Caso 3	$3.3360 \times 10^4$	16.1
Caso 4	$4.1968 \times 10^3$	8.40
Caso 5	$8.6308 \times 10^3$	10.2

Fonte: Shigaki et al (2015).

## 6 CONCLUSÕES

O cálculo da carga total de laminação tem influência direta no dimensionamento de novos laminadores e pode ajudar a responder certas perguntas como por exemplo: qual o tamanho do cilindro de laminação a ser utilizado? Qual a resistência mecânica necessária para o conjunto que suportará a carga de laminação? Qual o torque e potência necessária para que ocorra a redução programada? Devido ao desgaste qual seria o menor diâmetro útil do cilindro de laminação para que o processo se mantenha controlado? A carga de laminação também pode ser um item controlado de maneira *online* para que se ajuste o torque do motor elétrico que movimenta o cilindro de laminação para que o processo se mantenha livre de variações/defeitos.

A carga de laminação é influenciada por diversos fatores como descrito ao longo dos resultados deste estudo. Deve-se ressaltar que poucas configurações de parâmetros de laminação foram simuladas, nem todos os modos de deformação do material foram explorados, portanto, os resultados encontrados não podem ser generalizados. Entretanto para os casos simulados ambos os modelos confirmam que, para os casos analisados, a carga de laminação será tanto menor quanto:

- Menor for o coeficiente de atrito;
- Menor for o raio do cilindro de trabalho;
- Menor for a redução aplicada;
- Maior for a tensão a ré;
- Maior for a tensão a frente.

Para o controle do processo de laminação de modo *online*, modelos mais rápidos são necessários para que correções em parâmetros do processo possam ser feitas de maneira imediata para que haja controle da qualidade do material sendo fabricado. Nesse quesito o modelo de Bland e Ford foi mais rápido que o de Alexander, mas acredita-se que o algoritmo escrito pode ser melhorado eficientemente para reduzir-se ainda mais o tempo de processamento, por exemplo: reduzir-se o número máximo de iterações, que para este trabalho foi de 100, aumentar a tolerância do erro relativo entre o valor presente e valor anterior da variável de interesse, que neste trabalho foi de  $10^{-4}$ , utilização de equipamentos de processamento mais robustos, reduzir o número de divisões do arco de contato, que neste trabalho foi de 1501, além de melhorias na execução do código programado. Tais implementações podem tornar o uso de um modelo mais completo de laminação (Alexander) factível em sistemas de controle *online*.

Para os dois modelos analisados, Bland e Ford e Alexander, o primeiro apresentou valores de carga sempre mais altos do que o segundo. Consequentemente o arco de contato também foi maior para Bland e Ford.

O modelo de Alexander é considerado mais realístico, pois ele não depende de tantas aproximações quanto Bland e Ford. Esse modelo resolve a equação diferencial de von Karman levando em consideração o equilíbrio de forças horizontais e verticais atuantes no elemento sendo deformado e ainda considera duas condições de atrito, o agarramento ou deslizamento da chapa no cilindro. O raio deformado utilizado ainda leva em consideração o efeito das zonas elásticas na entrada e na saída da chapa.

O modelo de Bland e Ford assume que existe deslizamento em todo o comprimento do arco de contato e despreza uma parcela da equação diferencial, com o argumento de que para reduções e espessuras muito pequenas, esta parcela se mantém constante. Este modelo utiliza o raio deformado de Hitchcock.

Comparativamente, os modelos apresentaram resultados coerentes com aqueles encontrados na literatura e calculados por outros modelos, por exemplo o modelo NONCIRC, que possui excelente previsão do perfil deformado e de carga.

A utilização do raio deformado para o cálculo do comprimento do arco de contato contradiz a sugestão do autor Lenard (2007), que em seu livro não indica a utilização de  $R'$  para o cálculo de  $L$ . Porém os valores de comprimento do arco de contato se aproximaram mais daqueles calculados pelo modelo NONCIRC quando utilizou-se  $R'$  do que quando utilizou-se puramente  $R$ .

## **7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

- Melhorar o tempo de processamento dos algoritmos escritos;
- Implementar o modelo de Alexander voltado para a laminação a quente;
- Comparar os resultados obtidos por ambos os modelos com dados industriais reais;
- Implementar outros modelos de cálculo de carga.

## REFERÊNCIAS

ABDELKHALEK, S.; MONTMITONNET, P.; LEGRAND, N.; BUESSLER, P. Coupled approach for flatness prediction in cold rolling of thin strip. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 53, n. 9, p. 661-675, 2011. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740311000695>>.

ALEXANDER, J. M. On the Theory of Rolling. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)**, v. 326, n. 1567, p. 535-563, 1971.

BLAND, D. R.; FORD, H. The calculation of roll-force and torque in cold strip rolling with tensions. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, v. 159, p. 144, 1948.

CHEN, S.; LI, W.; LIU, X. Calculation of rolling pressure distribution and force based on improved Karman equation for hot strip mill. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 89, p. 256-263, 2014. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740314003142>>.

FORD, H.; ELLIS, F.; BLAND, D. R. Cold rolling with strip tension, Part I. A new approximate method of calculation and a comparison with other methods. **Journal of the Iron and Steel Institute**, v. 168, p. 57, 1951.

FRESHWATER, I. J. Simplified theories of flat rolling—I. The calculation of roll pressure, roll force and roll torque. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 38, n. 6, p. 633-648, 1996.

GRIMBLE, M. J.; FULLER, M. A.; BRYANT, G. F. A non-circular arc roll force model for cold rolling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, p. 643-663, 1978.

HELMAN, H.; CETLIN, P. R. **Fundamentos da conformação mecânica dos metais**. 2 ed. São Paulo: Artliber Editora, 2005. 263 Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=7FtjAAAAMAAJ>>. Acesso em: 31 de Maio 2015.

KRIMPELSTAETTER, K.; HOHENBICHLER, G.; FINSTERMANN, G.; ZEMAN, K. New non-circular arc skin pass model. **Ironmaking e Steelmaking**, v. 34, n. 4, p. 295-302, 2007. Disponível em: <<http://www.maneyonline.com/doi/abs/10.1179/174328107X167959>>.

LENARD, J. G. **Primer on Flat Rolling**. 1. Elsevier Science, 2007. 344 Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=4257Y3fJIvQC>>.

MONTMITONNET, P. Hot and cold strip rolling processes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 48-49, p. 6604-6625, 2006.

OROWAN, E. The calculation of roll pressure in hot and cold flat rolling. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, v. 150, p. 140, 1943.

PALMEIRA, A. A. **Processo de laminação**. Rio de Janeiro: 2005. Disponível em: <<http://www.fat.uerj.br/intranet/disciplinas/Processos%20de%20Fabricacao%20IV/Cap%203%20-%20Lamina%e7%e3o.pdf>>. Acesso em: 02 jun. 2015.

ROBERTS, W. L. **Cold Rolling of Steel**. Taylor e Francis, 1978. 808 Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=nOrdxdGe8T8C>>. Acesso em: 02 jun. 2015.

SHIGAKI, Y.; NAKHOUL, R.; MONTMITONNET, P. Numerical treatments of slipping/no-slip zones in cold rolling of thin sheets with heavy roll deformation. **Lubricants**, v. 3, n. 2, p. 113, 2015. Disponível em: <<http://www.mdpi.com/2075-4442/3/2/113>>.

SIEBEL, E. Kraft und materialflub bei der bildsamen formanderung. **Stahl Eisen**, v. 45, n. 37, p. 1563, 1925.

SIMS, R. B. The calculation of the roll force and torque in hot rolling mills. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, v. 168, p. 191-200, 1945.

VON KARMAN, T. Bietrag zur theorie des walzvorganges. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 5, p. 1563, 1925.

YANG, Y. Y.; LINKENS, D. A.; TALAMANTES-SILVA, J. Roll load prediction - Data collection, analysis and neural network modelling. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 152, n. 3, p. 304-315, 2004.

## LISTAGENS

### Bland e Ford

```
function
[arco,carga,pr,angulo]=P_CASO_1_BF(hi,hf,R,u,AA,BA,CA,DA,EA,Ecilindro,vcilindro,Ti,Tf,eac,PD,M,TOL)
%Esta etapa do programa calcula a carga de laminação/largura P pelo método
%de BLAND-FORD, corrigindo o raio por HITCHCOCK.
%Revisado Hugo 28/10/15 - Próximo ao programado no excel, alguns erros em
casas decimais
%devido à diferença de métodos de integração (aqui regra de 1/3 simpson, no
%excel integração de um polinômio de 6° grau)
%Equação de Fluxo de ABDELKHALEK

%BF=0.355,0.252,277.5,0.02,470.5,175.4,0.45,8.9,25,210000,0.3,170,100,2.05,
2/sqrt(3),1501,1e-4
%CASO 1
%BF=0.355,0.252,277.5,0.0305,470.5,175.4,0.45,8.9,25,210000,0.3,30,100,0,2/
sqrt(3),1501,1e-4
%CASO 2
%AX=0.355,0.252,277.5,0.02,470.5,175.4,0.45,8.9,25,210000,210000,0.3,0.3,17
0,100,2.05,2/sqrt(3),1501,1e-4
%CASO 1
%AX=0.355,0.252,277.5,0.0305,470.5,175.4,0.45,8.9,25,210000,210000,0.3,0.3,
30,100,0,2/sqrt(3),1501,1e-4
%CASO 2

% hi=0.355; %input('Qual é a espessura inicial? ')
% hf=0.252; %input('Qual é a espessura final? ')
% R=555/2; %input('Qual é o raio do cilindro de trabalho')
% u=0.04; %input('Qual o coeficiente de atrito (Coulomb)?')
% AA=470.5; %coeficientes de abdelkalek (AA+BAe)*(1-CA*exp(-DAe)-EA
% BA=175.4;
% CA=0.45;
% DA=8.9;
% EA=25;
% Ecilindro=210000; %input('Qual é módulo de Young do cilindro?')
% vcilindro=0.3; %input('Qual é o coeficiente de poisson do cilindro?')
% Ti=170; %input('Qual é a tensão de tração na entrada?')
% Tf=100; %input('Qual é a tensão de tração na saída?')
% eac=2.05; %input('Qual a deformação acumulada?')
% PD=2/sqrt(3); %input('Converter para estado plano de deformação? Se sim,
use 2/sqrt(3) ao invés de 1')
% M=1501; %input('Qual é o número de divisões do arco de contato?')
% TOL=0.0001; %input('Qual é a tolerância para o raio corrigido?(ex.:0.1)')

c=16*(1-vcilindro^2)/(pi*Ecilindro);
y=0;
NP=1;
lc=1; %criterio de parada geral
P=0;
RD=0;

%Teste para a espessura mínima de redução
hfmin=hi-2*R*(1-cos(atan(u)));
if hf<hfmin, hf=hfmin;
    display(sprintf('BF-Espessura final menor do que a espessura mínima, a
nova espessura final será hf=%.4f.',hfmin))
end
```



```

    angulo(1)=0;
    for j=1:M-1
        angulo(j+1)=angulo(j)+y;
    end

    for j=1:M

PLOTPOSITIVOY(j)=posp_abdel(eac,angulo(j),AA,BA,CA,DA,EA,hi,af,arco,u,RD,hf
);
    end

    for j=1:M

PLOTNEGATIVOY(j)=posn_abdel(eac,angulo(j),AA,BA,CA,DA,EA,hi,ai,arco,u,RD,hf
,Hi);
    end

    for i=1:M
        if PLOTNEGATIVOY(i)<=PLOTPOSITIVOY(i);
            pr(i)=PLOTNEGATIVOY(i);
        end
        if PLOTPOSITIVOY(i)<=PLOTNEGATIVOY(i);
            pr(i)=PLOTPOSITIVOY(i);
        end
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%PLOT%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

X=0;
for j=1:NUM %até a metade do tamanho do angulo neutro

SUM1=SUM1+H*(posp_abdel(eac,X,AA,BA,CA,DA,EA,hi,af,arco,u,RD,hf)+4*posp_abdel
el(eac,X+H,AA,BA,CA,DA,EA,hi,af,arco,u,RD,hf)+posp_abdel(eac,X+2*H,AA,BA,CA
,DA,EA,hi,af,arco,u,RD,hf))/3; %simpson1/3
    X=X+2*H; %andando de dois em dois incrementos, três pontos

end

H=(alfa-alfan)/NN; %tamanho do incremento do angulo neutro até o maximo
X=alfan; %começa ja do angulo neutro e vai ate o angulo maximo
NUM=NN/2; % numero de partes até do angulo neutro até o angulo maximo
dividido por dois
SUM2=0;
for j=1:NUM %até a metade do caminho entre o angulo neutro e o angulo
maximo

SUM2=SUM2+H*(posn_abdel(eac,X,AA,BA,CA,DA,EA,hi,ai,arco,u,RD,hf,Hi)+4*posn_
abdel(eac,X+H,AA,BA,CA,DA,EA,hi,ai,arco,u,RD,hf,Hi)+posn_abdel(eac,X+2*H,AA
,BA,CA,DA,EA,hi,ai,arco,u,RD,hf,Hi))/3; %simpson1/3
    X=X+2*H;

end
SUM1;
SUM2;
SUM=SUM1+SUM2; %soma de p+ e p-
P=RD*SUM; %calculo da carga total PxWxR
Raux=R*(1+a4*P); %calculo do raio deformado (Hitchcock)
PLOT(IT)=Raux;
if abs((Raux-RD)/RD) < TOL || IT>100
    lc=0;
    %condição de interação, se a diferença absoluta entre o raio
deformado e o raio anterior for menor que a tolerancia=>terminara

```

```

else
    RD=Raux; %caso contrario, recomece com R1 sendo o novo raio do
cilindro.
    IT = IT + 1;
end

end

arco=sqrt(RD*(hi-hf)-((hi-hf)^2)/4);
carga=P;

if IT>100 %não convergiu
    arco=1;
    carga=1000;
    pr=zeros(1,M);
    angulo=zeros(1,M);
    display('BF-Cálculo não convergente - IT>100.')
end

if carga~=1000
    display(sprintf('BF-Convergiu com %i iterações.',IT))
end

end

```

### Função posn\_abdel

```

function y=posn_abdel(eac,PHI,AA,BA,CA,DA,EA,hi,auxi,auxr,u,RD,hf,Hi)
h=(hf+2*RD*(1-cos(PHI)));
aux=eac+1.1547005384*log(hi/h);
if aux<0, aux=0;
end
y=1.1547005384*((AA+BA*aux)*(1-CA*exp(-DA*aux))-EA)*auxi*exp(u*(Hi-
2*auxr*atan(auxr*PHI)))*h/hi; %retorna o valor de p- relativo aquele
incremento

```

### Função posp\_abdel

```

function y=posp_abdel(eac,PHI,AA,BA,CA,DA,EA,hi,auxi,auxr,u,RD,hf)
h=(hf+2*RD*(1-cos(PHI))); %calculo da altura h durante o passe na altura
do angulo fi
aux=eac+1.1547005384*log(hi/h);
if aux<0, aux=0;
end
y=1.1547005384*((AA+BA*aux)*(1-CA*exp(-DA*aux))-
EA)*auxi*exp(2*u*auxr*atan(auxr*PHI))*h/hf; %retorna o valor de p+ relativo
aquele incremento

```

### Função tensao\_abdel

```

function S=S(PD,AA,BA,d,CA,DA,EA)
S=PD*((AA+BA*d)*(1-CA*exp(-DA*d))-EA);

```

## Alexander

```

function
[arco, carga, pr, angulo]=P_CASO_1_AX(hi,hf,R,u,AA,BA,CA,DA,EA,Etira,Ecilindro
,vtira,vcilindro,Ti,Tf,eac,PD,M,TOL)
%Este programa calcula a carga de laminação P/w pelo método
%de ALEXANDER para integrar a equação de von Karman sob a forma:

% $d[h(pr-S \pm \tan(\text{PHI}))]/d\text{Phi}=2RD(pr*\text{sen}(\text{PHI}) \pm \text{tau}*\text{cos}(\text{PHI}))$ 

%utilizando as condições de agarramento ou deslizamento, corrigindo o raio
%pela equação de HITCHCOCK-MELHORADA POR FORD e
%Utilizando o método de resolução de PVI de Runge-Kuta de 4ª ordem.
%Equação de Fluxo de ABDELKALEK
%Criado por Hugo 10/10/15
%Editado por último - 28/10/15

%BF=0.355,0.252,277.5,0.02,470.5,175.4,0.45,8.9,25,210000,0.3,170,100,2.05,
2/sqrt(3),1501,1e-4
%CASO 1
%BF=0.355,0.252,277.5,0.0305,470.5,175.4,0.45,8.9,25,210000,0.3,30,100,0,2/
sqrt(3),1501,1e-4
%CASO 2
%AX=0.355,0.252,277.5,0.02,470.5,175.4,0.45,8.9,25,210000,210000,0.3,0.3,17
0,100,2.05,2/sqrt(3),1501,1e-4
%CASO 1
%AX=0.355,0.252,277.5,0.0305,470.5,175.4,0.45,8.9,25,210000,210000,0.3,0.3,
30,100,0,2/sqrt(3),1501,1e-4
%CASO 2

% hi=0.355; %input('Qual é a espessura inicial? ')
% hf=0.252; %input('Qual é a espessura final? ')
% R=555/2; %input('Qual é o raio do cilindro de trabalho')
% u=0.02; %input('Qual o coeficiente de atrito (Coulomb)?')
% AA=470.5; %coeficientes de abdelkalek (AA+BAe)*(1-CA*exp(-DAe)-EA
% BA=175.4;
% CA=0.45;
% DA=8.9;
% EA=25;
% Etira=210000; %input('Qual é módulo de Young da tira?')
% Ecilindro=210000; %input('Qual é módulo de Young do cilindro?')
% vtira=0.3; %input('Qual é o coeficiente de poisson da tira?')
% vcilindro=0.3; %input('Qual é o coeficiente de poisson do cilindro?')
% Ti=170; %input('Qual é a tensão de tração na entrada?')
% Tf=100; %input('Qual é a tensão de tração na saída?')
% eac=2.05; %input('Qual a deformação acumulada?')
% PD=2/sqrt(3); %input('Converter para estado plano de deformação? Se sim,
use 2/sqrt(3) ao invés de 1')
% M=1501; %input('Qual é o número de divisões do arco de contato?')
% TOL=0.0001; %input('Qual é a tolerância para o raio corrigido(ex.:0.1)')

%Teste para a espessura mínima de redução
hfmin=hi-2*R*(1-cos(atan(u)));
if hf<hfmin, hf=hfmin;
    display(sprintf('AX-Espessura final menor do que a espessura mínima, a
nova espessura final será hf=%.4f.',hfmin))
end

%Cálculo das tensões de escoamento na entrada e saída da zona plástica
di=eac+PD*log(hi/hi); %calcula da deformação logarítmica na entrada

```

```

df=eac+PD*log(hi/hf); %calculo da deformação logarítmica na saída
Si=tensao_abdel(PD,AA,BA,di,CA,DA,EA);%calculo da tensão de escoamento na
entrada da zona plástica
Sf=tensao_abdel(PD,AA,BA,df,CA,DA,EA);%calculo da tensão de escoamento na
saída da zona plástica

%Teste para a magnitude das tensões a ré a frente pois não podem ser maior
%que o limite de escoamento do material
if Ti>Si, Ti=Si;
    display(sprintf('BF-Tensão a ré maior que resistência do material, a
nova tensão a ré será Ti=%.2f.',Si))
end
if Tf>Sf, Tf=Sf;
    display(sprintf('BF-Tensão a frente maior que resistência do material,
a nova tensão a frente será Tf=%.2f.',Sf))
end

%Primeira estimativa da carga, raio deformado, e alfa (ângulo do arco de
contato)
L=sqrt(R*(hi-hf)-((hi-hf)^2)/4);
hm=(2*hf+hi)/3;
V=u*L/hm;
Sm=((Si+2*Sf)/3)-((Ti+Tf)/2);
Pap=Sm*L*(exp(V)-1)/V;
c=16*(1-vcilindro^2)/(pi*Ecilindro);
c1=c;
RD=R*(1+(c1*Pap)/(hi-hf));
P1=Pap;

%Algumas variáveis auxiliares e aproximações iniciais
IT=1;
M1=M-1;
Tei=Ti;
Tef=Tf;
codigo=1;

while codigo==1

    alfa=acos(1-(hi-hf)/(2*RD));
    XM=M;
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    PHI=0;
    DPHI=alfa/M;
    for i=1:M
        angulo(i)=PHI;
        PHI=PHI+DPHI;
    end
    angulo=flip1r(angulo);
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    DPHI=alfa/(XM-1);
    PHI=alfa;

    %calculo da tensão de escoamento para todos os valores de phi
    for i=1:M
        h=(hf+2*RD*(1-cos(PHI)));
        aux(i)=eac+PD*log(hi/h);
        S(i)=tensao_abdel(PD,AA,BA,aux(i),CA,DA,EA);
        PHI=PHI-DPHI;
    end
end

```

```

%cálculo das condições de contorno (pr no início e no final)
pr(1)=(Si-Tei)/(1+u*tan(alfa));
if u*pr(1)>S(1)/2
    pr(1)=Si-Tei-(S(1)/2)*tan(alfa);
end
pr(M)=Sf-Tef;

%preenchimento dos valores de prEX (pressão vindo da saída para a
entrada)
prEX(M)=pr(M);
PHI=0;
Q=+1;
for i=1:M1
    F=M+1-i;
    if((u*prEX(F))<(S(F))/2)
F0=G1(PHI,RD,hf,u,Q)*prEX(F)+G2_AbdelKalek(PHI,RD,hf,u,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA
,EA,PD);
        A=G1((PHI+0.5*Q*DPHI),RD,hf,u,Q);
C=G2_AbdelKalek((PHI+0.5*Q*DPHI),RD,hf,u,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA,EA,PD);
        F1=A*(prEX(F)+0.5*Q*DPHI*F0)+C;
        F2=A*(prEX(F)+0.5*Q*DPHI*F1)+C;
F3=G1((PHI+Q*DPHI),RD,hf,u,Q)*(prEX(F)+Q*DPHI*F2)+G2_AbdelKalek((PHI+Q*DPHI
),RD,hf,u,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA,EA,PD);
        DS=DPHI*(F0+2*(F1+F2)+F3)*Q/6;
    else
F0=G4()*prEX(F)+G3_AbdelKalek(PHI,RD,hf,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA,EA,PD);
        A=G4();
C=G3_AbdelKalek((PHI+0.5*Q*DPHI),RD,hf,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA,EA,PD);
        F1=A*(prEX(F)+0.5*Q*DPHI*F0)+C;
        F2=A*(prEX(F)+0.5*Q*DPHI*F1)+C;
F3=G4()*(prEX(F)+Q*DPHI*F2)+G3_AbdelKalek((PHI+Q*DPHI),RD,hf,Q,hi,eac,AA,BA
,CA,DA,EA,PD);
        DS=DPHI*(F0+2*(F1+F2)+F3)*Q/6;
    end
    prEX(F-1)=prEX(F)+DS;
    PHI=PHI+DPHI;
end
%preenchimento dos valores de prEN (pressão vindo da entrada para a
saída)
prEN(1)=pr(1);
PHI=alfa;
Q=-1;
for f=1:M1
    if((u*prEN(f))<(S(f))/2)
F0=G1(PHI,RD,hf,u,Q)*prEN(f)+G2_AbdelKalek(PHI,RD,hf,u,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA
,EA,PD);
        A=G1((PHI+0.5*Q*DPHI),RD,hf,u,Q);
C=G2_AbdelKalek((PHI+0.5*Q*DPHI),RD,hf,u,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA,EA,PD);
        F1=A*(prEN(f)+0.5*Q*DPHI*F0)+C;
        F2=A*(prEN(f)+0.5*Q*DPHI*F1)+C;
F3=G1((PHI+Q*DPHI),RD,hf,u,Q)*(prEN(f)+Q*DPHI*F2)+G2_AbdelKalek((PHI+Q*DPHI
),RD,hf,u,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA,EA,PD);
        DS=DPHI*(F0+2*(F1+F2)+F3)*Q/6;
    else
F0=G4()*prEN(f)+G3_AbdelKalek(PHI,RD,hf,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA,EA,PD);
        A=G4();
C=G3_AbdelKalek((PHI+0.5*Q*DPHI),RD,hf,Q,hi,eac,AA,BA,CA,DA,EA,PD);
        F1=A*(prEN(f)+0.5*Q*DPHI*F0)+C;
        F2=A*(prEN(f)+0.5*Q*DPHI*F1)+C;
F3=G4()*(prEN(f)+Q*DPHI*F2)+G3_AbdelKalek((PHI+Q*DPHI),RD,hf,Q,hi,eac,AA,BA
,CA,DA,EA,PD);
    end
end

```

```

        DS=DPHI*(F0+2*(F1+F2)+F3)*Q/6;
    end
    prEN(f+1)=prEN(f)+DS;
    PHI=PHI-DPHI;
end

%Achar a função pr(i) como sendo o menor valor entre prEX e prEN, para
%remover os pontos além de onde as duas se cruzam.
for i=1:M
    if prEX(i)<=prEN(i);
        pr(i)=prEX(i);
    end
    if prEN(i)<=prEX(i);
        pr(i)=prEN(i);
    end
end

%Determinação do ângulo neutro e a pr máximo
X=-2;
for i=1:M1
    if prEX(i)>=prEN(i) && prEN(i+1)>=prEX(i+1);
        X=DPHI/(1+(prEX(i)-prEN(i))/(prEN(i+1)-prEX(i+1)));
        t=i;
    else
        if i==M1 && X<0
            display('AX-Ponto neutro está fora da região de contato.')
```

arco=1;

carga=1000;

pr=zeros(1,M);

angulo=zeros(1,M);

return

end

end

end

```

        Xt1=t+1;
        alfan=(XM-Xt1)*DPHI+X;
        Y=(prEN(t+1)-prEN(t))*(1-X/DPHI);
        prN=prEN(t)+Y;
        IN=t;

    %Integrar a pressão pr pela regra do trapézio e achar a carga de
    laminação
    %incluindo o efeito do ângulo e a contribuição da tensão de
    cisalhamento,
    %primeiro achar tauN

    SN=PD*((AA+BA*(eac+PD*log(hi/(hf+2*RD*(1-cos(alfan)))))))*(1-CA*exp(-
    DA*(eac+PD*log(hi/(hf+2*RD*(1-cos(alfan))))))-EA);

    if (u*prN<SN/2)
        tauN=u*prN;
    else
        tauN=SN/2;
    end

    PHI=alfa;

    for i=1:M
        ARG=PHI-0.5*alfa;
    end
end

```

```

XS=sin(ARG);
XC=cos(ARG);
prCOS(i)=pr(i)*XC;

if (u*pr(i)<S(i)/2)
    tau(i)=u*pr(i);
else
    tau(i)=S(i)/2;
end
tauSIN(i)=tau(i)*XS;
PHI=PHI-DPHI;
end

tauprN=tauN*sin(alfan-alfa*0.5);
daEN=(tauSIN(IN)+tauprN)*(DPHI-X)*0.5;
daEX=(tauSIN(IN+1)+tauprN)*X*0.5;

%Regra do trapézio

sum=0;
for i=2:IN-1
    sum=sum+tauSIN(i);
end
sumEN=(DPHI/2)*(tauSIN(2-1)+2*sum+tauSIN(IN-1+1));
areaEN=sumEN+daEN;

sum=0;
for i=IN+2:M-1
    sum=sum+tauSIN(i);
end
sumEX=(DPHI/2)*(tauSIN(IN+2-1)+2*sum+tauSIN(M-1+1));
areaEX=sumEX+daEX;

%Regra de simpson

IMPAR=0;
PAR=0;
for i=2:2:M-3
    PAR=PAR+prCOS(i);
    IMPAR=IMPAR+prCOS(i+1);
end
sumprCOS=(DPHI/3)*(prCOS(2-1)+4*(PAR+prCOS(M-3+2))+2*IMPAR+prCOS(M-3+3));

%Calculo da carga
P=RD*(sumprCOS+areaEN-areaEX);

%FORD - ZONAS ELÁSTICAS
%cálculo da influencia da zona elastica na entrada e na saída

Peii=(1-vtira^2)*hi*((Si-Ti)^2)*sqrt(RD/(hi-hf))/(4*Etira);
IT1=0;
while 1
    tei=Ti-2*u*Peii/hi;
    Pei=(1-vtira^2)*hi*((Si-tei)^2)*sqrt(RD/(hi-hf))/(4*Etira);
    if abs(Pei-Peii)/Pei<TOL || IT1>100
        break;
    else
        Peii=Pei;
    end
end

```

```

        IT1=IT1+1;
    end
end

A1=(2/3)*sqrt(RD*hf*(1-vtira^2)/Etira);
Pefi=A1*(Sf-Tf)^1.5;
IT2=0;

while 1
    tef=Tf-2*u*Pefi/hf;
    Pef=A1*(Sf-tef)^1.5;
    if abs((Pef-Pefi)/Pef)<TOL || IT2>100
        break;
    else
        Pefi=Pef;
        IT2=IT2+1;
    end
end

%Calculo da carga mais a influencia do zona elástica
P=P+Pei+Pef;

%Cálculo do novo raio deformado
deltaT=vtira*(1+vtira)*(hf*Tf-hi*Ti)/Etira;
deltaE=(1-vtira^2)*(Sf-tef)*hf/Etira;
A2=c1/(sqrt((hi-hf)+deltaE+deltaT)+sqrt(deltaE))^2;
RD=R*(1+A2*P);

if abs((P-P1)/P1)<TOL || IT>100
    codigo=3;
else
    P1=P;
    IT=IT+1;
end

end

RD;
arco=sqrt(RD*(hi-hf)-((hi-hf)^2)/4);
carga=P;

if IT>100 %não convergiu
    arco=1;
    carga=1000;
    pr=zeros(1,M);
    angulo=zeros(1,M);
    display('AX-Cálculo não convergente - IT>100.')
end

if carga~=1000
    display(sprintf('AX-Convergiu com %i iterações.',IT))
end

end

```

### Função G1

```
function G1=G1 (PHI, RD, hf, u, Q)
h=(hf+2*RD*(1-cos (PHI) ));
G1=Q*u*(2*RD/h+sec (PHI) )/(cos (PHI) -u*sin (PHI) *Q); %Retorna o valor de G1 na
posição PHI
```

### Função G2\_AbdelKalek

```
function G2=G2_AbdelKalek (PHI, RD, hf, u, Q, hi, eac, A, B, C, D, E, PD)
h=(hf+2*RD*(1-cos (PHI) ));
aux=(eac+PD*log (hi/h) );
G2=( (2*RD*sin (PHI) *PD*( (A+B*aux) *(1-C*exp (-D*aux) ) -E) )/h+(B-A*C*(-D) *exp (-
D*aux) -B*aux*C*(-D) *exp (-D*aux) ) *PD)/(1-u*Q*sin (PHI) /cos (PHI) ); %Retorna o
valor de G2 na posição PHI
```

### Função G3\_AbdelKalek

```
function G3=G3_AbdelKalek (PHI, RD, hf, Q, hi, eac, A, B, C, D, E, PD)
h=(hf+2*RD*(1-cos (PHI) ));
aux=(eac+PD*log (hi/h) );
G3=PD*( (A+B*aux) *(1-C*exp (-D*aux) ) -
E) *(2*RD*sin (PHI) *(1+Q*0.5*tan (PHI) )/h+Q*(RD*cos (PHI) /h+0.5*(sec (PHI) ) ^2) ) +
PD*(B-A*C*(-D) *exp (-D*aux) -B*aux*C*(-D) *exp (-
D*aux) ) *(1+0.5*Q*tan (PHI) ); %Retorna o valor de G3 na posição PHI
```

### Função G4

```
function G4=G4 ()
G4=0; %Retorna o valor de G4 na posição PHI
```

### Função tensao\_abdel

```
function S=S (PD, AA, BA, d, CA, DA, EA)
S=PD*( (AA+BA*d) *(1-CA*exp (-DA*d) ) -EA);
```